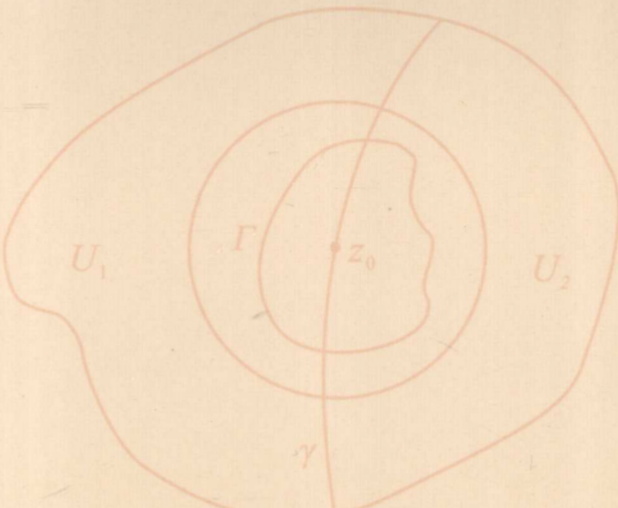
“十一五”国家重点图书 中国科学技术大学精品教材

简明复分析

第2版

龚 昇 编著



中国科学技术大学出版社

责任编辑／李攀峰
封面设计／黄 彦



中国科学技术大学精品教材
“十一五”国家重点图书

简明复分析

定价: 20.00 元

ISBN 978-7-312-02169-5

上架建议：数学类



中国科学技术大学精品教材

简明复分析

JIANMING FU FENXI

第 2 版

龚　昇　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书较系统地讲述了复变函数论的基本理论和方法. 全书共分 6 章，内容包括：微积分，Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式，Weierstrass 级数理论，Riemann 映射定理，微分几何与 Picard 定理，多复变数函数浅引等. 每章配有适量习题，供读者选用. 本书试图用近代数学的观点和方法处理复变函数内容，并强调数学的统一性. 例如，用微分几何的初步知识，对 Picard 大、小定理给出简洁的证明；强调变换群的概念，利用 Pompeiu 公式给出一维 $\bar{\partial}$-问题的解，并用此来证明 Mittag-Leffler 定理与插值定理等，利用简单区域上的全纯自同构群证明 Poincaré 定理；对多复变数函数做了简明的介绍.

本书内容精练，深入浅出，逻辑严谨，注意复分析内容与近代数学的衔接，使传统内容以新的面貌出现.

本书可作为大学数学系、应用数学系本科生复变函数基础课教材，以及相关专业系科研究生、教师的教学参考书，也可供从事复分析、实分析研究及相关专业的科技工作者阅读.

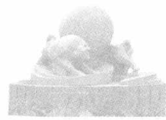
图书在版编目(CIP)数据

简明复分析/龚昇编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.5
(中国科学技术大学精品教材)
“十一五”国家重点图书
ISBN 978-7-312-02169-5

Ⅰ. 简…　Ⅱ. 龚…　Ⅲ. 复分析—高等学校—教材　Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 041458 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印刷　中国科学技术大学印刷厂
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　11
插页　2
字数　215 千
版次　1996 年 5 月第 1 版　2009 年 5 月第 2 版
印次　2009 年 5 月第 3 次印刷
定价　20.00 元



编审委员会

总　序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年。为了反映五十年来办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

1958年学校成立之时，教员大部分都来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又做研究的传统。同时，根据"全院办校，所系结合"的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。五十年来，外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

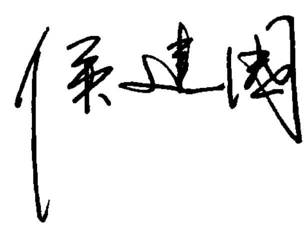
学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中做出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养了一届又一届优秀学生。这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使"科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合"的方针得到进一步

深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校。在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材。五十年来,进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术。

这次入选的50种精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校五十年教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。该系列精品教材的出版,既是向学校五十周年校庆的献礼,也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念。



2008年8月

第 2 版前言

本书写于 1992 年，当时我在美国加州大学圣地亚哥校区教书. 本书于 1996 年 5 月由北京大学出版社出版，印了 3000 册，不久就售罄. 1999 年 9 月重印了 7000 册. 我利用重印的机会，对全书进行了修订，更为重要的是写了一个很长的重印说明，用来说明写作本书的指导思想.

本书的英文版于 2001 年由 World Scientific Publishing Co. 出版，且成为 Best Selling 的书之一. 今年此书英文版又出了修订版，除了对原有章节进行仔细校订外，又加了两章：一章是椭圆函数，一章是 Riemann 了函数与素数基本定理.

现在印了 1 万册的中文版的书也早已卖完，于是在中国科学技术大学出版社出此书的第 2 版，作为对我工作了近一辈子的中国科学技术大学建校 50 周年的献礼.

本书的写作意图在第 1 版的前言及重印说明中已经说得很清楚了. 第 2 版依然坚持我在 15 年前的想法. 因此，在第 2 版中只做了部分的修改，以保持此书原有的风格. 由于此书是作为一学期的复分析课程的教材，现有的内容已经不易全部教完，所以在第 2 版中不再增加新的章节了.

由于本书与复分析传统教材的写法有些不同，以致此书引起了一些同行的兴趣. 也正因为与传统的写法有些不同，以致用此书作为教材进行教学要多费些功夫. 本书曾在中国科学技术大学、北京师范大学、香港中文大学、美国 Georgetown University 等国内外多所大学当做教材，同时也会有国内外众多的大学以此书作为复分析课程的教学参考书.

我深信，随着时间的推延，我对复分析这门课程的看法，会愈来愈多地被人们接受，以此书作为教材的大学也会增多，用这种看法来写复分析的教材也会愈来愈多.

最后，我深切感谢北京师范大学郑学安教授，本书第 2 版如何修改，他出力

最多.我也深切感谢中国科学技术大学出版社为本书第2版的出版所做的努力.

对本书中的缺点与毛病,祈读者不吝赐教,不胜企盼.

龚　昇

2008年10月于北京

重印说明

在国内外，我都教过复变函数这门基础课，拟写一本这门课的教材的想法酝酿已久．经过长时间的思索与考虑，直到 1992 年 9 月在美国教书时才写成这本很薄的小书，并于 1996 年 5 月由北京大学出版社出版．出版前后，此书曾在中国科学技术大学、清华大学等几所大学做过教材，在教学过程中发现了一些问题．如：习题配得不够，有些地方写得太简单，需要补上证明或多说几句话．在这次重印出版时，对这些缺点做了些修改，而这是较易做到的．但对本书最要修补的是：对本书写作的意图，并未做应有的足够的说明，原有的前言写得太简单了．这就使我想起 1966 年我写的另一本大学基础课教材《简明微积分》．这是我教了八年书之后(这八年中主要是教微积分)，经过了很长时间考虑之后才写成的．但写那本书的想法很长时间以来从未系统地叙述过，只是在 1966 年《自然辩证法研究通讯》上写了一篇短文，做了十分简要的说明．这当然不可能引起人们的注意，直到 30 年后，我在中国科学技术大学以及其他一些大学，在一些会议上系统地讲述了我的想法，才引起人们的注意．后来在这些讲话的基础上写了一本小册子《话说微积分》(中国科学技术大学出版社，1998 年 5 月出版)，受到国内外数学界以及教与学微积分师生们较为广泛的欢迎．因此，将写作本书的意图写出来，一方面可以使应用本书进行教学的师生们更好地理解本书的内容，另一方面也可以尽早地得到大家的指教．

复变函数论是一门历史悠久的学科，出版的教科书不计其数，其中不少是写得很好的．为何我还要来再写一本教科书？写这本书的指导思想是什么？与传统的教材有哪些不同？如果没有明确的指导思想，写出来的教材难免是将他人写的教材修修补补，排列组合，人云亦云．

数学教材要现代化已是大势所趋．但如何现代化，要不断探讨与尝试，才能逐步摸索出一条正确的途径．将一些近代数学不断地放到基础课中去，使基础课教材愈写愈厚，这可能不是一种十分正确的途径．基础课教材终究应该以讲基础的内容为主，本书试图将一些传统基础的内容尽可能用近代的观点与语言

来叙述与证明.由于数学的发展,一些较为近代的概念现在似乎应属于基础的范畴.基础的内涵当然是在不断地推陈出新的.无可置疑,这种尝试,必然会引起各种争议,但只有争议才能得到进步与发展.

强调数学的统一性,也为数学界中愈来愈多的人所倡导.这就是强调数学各分支之间的相互影响、相互渗透.也就是数学各分支之间你中有我、我中有你,数学本身是一个统一体.数学发展到了今天,将各分支的基础课相互割裂,强调"纯",这种时代似乎也应该过去了.

在这本不到200页的小书中,大部分内容的写法仍然是传统的,但同时在本书的部分内容中力图做到上述两点,这可体现在以下与传统教材有哪些不同的说明中.

1. 复分析是指复数域上的分析,更确切一些,是指复流形上的分析.作为大学基础课教材,由于历史的原因,复分析往往称为复变函数论或解析函数论,而现在出版的教材,往往称为复分析,因为这种说法更确切.例如,在本书中强调引入代数与几何等到教材中,所涉及的不仅仅是在论函数.

什么是大学教材的复分析?就是讨论复数域上的微积分.这是撰写本书的第一个观点.在这个观点下,大学复分析的内容应分为两个部分:一个部分是可以没有多大困难地由实数域上的微积分,这里指的是大学普通微积分,直接推广得到的.另一个部分是在原有实数域上的微积分所没有的,不能直接推广得到的.前一部分当然重要,但更为重要的是后一部分.本书的第1章,讲述的是前一部分.由于这些结果可以没有多大困难地直接推广得到,所以有的就述而不证.普通微积分的内容很多,人们当然没有必要及可能来将这些内容一一加以验证,是否可以推广到复数域上,只能抓住主要内容.什么是微积分中的主要内容?我在写《简明微积分》时已十分明确地提出,即微积分由微分、积分以及指出微分与积分是一对矛盾这三个部分所组成.而第三部分必须用外微分形式才能说清楚,后来在拙作《话说微积分》中对此做了详细的阐述.本书第1章就是按这种观点对微积分的一个十分简略的回顾,并讲了这些结果在复数域上的推广.其中复平面上的微积分基本定理就是复形式的 Green 定理(1.4节定理2),这为第2章建立 Pompeiu 公式做了准备.

2. 传统的复变函数论由三个部分组成,它们都是在实数域上的微积分,即大学微积分中所没有的,而是在复数域上所特有的.这三部分是:Cauchy 积分理论、Weierstrass 级数理论与 Riemann 几何理论.作为一本大学本科的教材,理应包含这三部分内容,这就是本书的第2章、第3章与第4章.本科教学大纲

所规定的内容在这 3 章中不但都有了，而且还多. 但如前所述，本书对这些传统内容的一些部分给予了现代化的处理，与传统教材有所不同.

从复变函数论是复数域上的微积分这个观点出发，微积分基本定理在复数域中成为复形式的 Green 定理. 由此立即导出 Cauchy-Green 公式，即 Pompeiu 定理(第 2 章 2.1 节定理 1). 这时候函数的实部与虚部属于 C^1，并不要求函数是全纯的，而 Cauchy 积分定理与公式成为它的简单推论. 为什么要先引入 Pompeiu 公式而不先引入 Cauchy 积分定理与公式？ 这是因为：(1) 从复变函数论是复数域上的微积分这个观点出发，这是顺理成章的. 从复形式的 Green 定理出发，不加任何条件，得出来的应是 Pompeiu 公式，而不是 Cauchy 积分公式. (2) 用 Pompeiu 公式可以得到一维 $\bar{\partial}$-问题的解(第 2 章 2.1 节定理 4)，这是由 Cauchy 积分公式所得不到的. 众所周知，$\bar{\partial}$-问题是近代偏微分方程理论中十分重要的部分，是近代数学中一个强有力的工具. 本书这样处理，还为了使读者能及早接触到近代数学的一点气息. 不仅如此，在本书的第 3 章中用 $\bar{\partial}$-问题的解证明了一系列定理，尤其是 Mittag-Leffler 定理(第 3 章3.4节定理 6). 一方面使定理的证明十分简单，另一方面显示了 $\bar{\partial}$-问题的威力. 传统的教材往往几乎只讨论解析函数，以致有些教科书的书名就叫做解析函数论. 但数学发展到今天，人们愈来愈认识到只讨论解析函数已是不够的了，用解析函数论做书名似乎也已过时，$\bar{\partial}$-问题的产生与应用就是支持上述看法的一个例子.

Pompeiu 定理及一维 $\bar{\partial}$-问题的解也许是第一次出现在国内的大学复分析的教材中. 用 $\bar{\partial}$-问题的解来证明 Mittag-Leffler 定理是我给出的，是第一次出现在大学教材中，作为用近代数学的观点来处理经典结果的一个例子. 在同一节中，另一个例子是用 $\bar{\partial}$-问题的解来证明插值定理(第 3 章 3.4 节定理 7). 这也许也是第一次出现在国内的大学教材中，由于这种证明十分简单明了，相信会被更多的作者采用. 例如，由史济怀、刘太顺编著的《复变函数》(中国科学技术大学出版社，1998 年出版)就将这两条定理及证明写入书中，而且这两条定理以及 Pompeiu 公式与 $\bar{\partial}$-问题的解作为书中两个特别要提到的内容之一而写在书的前言的开头. 此外，在本书中，作为 Pompeiu 定理的另一个应用，还给出了全纯函数的各阶导数在紧集上的一致估计(第 2 章 2.3 节定理 6 的(2)). 这在传统教材中，一般来说是不会写进去的. 但这是一条很深刻的定理，不用 Pompeiu 公式是难以证明的. 在第 2 章中写进这条定理，是因为一方面这条定理有不少应用，另一方面也让读者看看 Pompeiu 定理的威力，牛刀小试，就能得到如此深刻的定理.

3. 复分析中的基本定理之一是 Poincaré-Koebe 单值化定理. 这是一条纲领性的定理. 定理说:任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一:单位圆,复平面 C,扩充复平面 C^*. 这条定理是复分析中最重要和最美好的定理之一. 它与 Abel 定理、Riemann-Roch 定理成为经典 Riemann曲面的三条最重要的定理. 这样的定理在数学中并不多见. Poincaré-Koebe定理的证明已超出了大学基础课的范围,不能给出,但定理本身必须在大学教科书中叙述,并强调它的意义. 本书第 3 章 3.3 节中就叙述了这条定理. 这条定理有很多的应用,但在一本大学基础课教材中,最重要的意义是:这条定理确立了单位圆、复平面 C 及扩充复平面 C^* 在复分析中的重要地位. 对这三种区域进行探讨成为复分析中极为重要的组成部分,所以我们说这是一条纲领性的定理.

在本书中,给出了这三种区域的全纯自同构群. 在第 2 章 2.5 节中给出了单位圆的全纯自同构群,在第 3 章 3.3 节中给出了 C 及 C^* 的全纯自同构群. 一个区域的全纯自同构群是十分重要的,这是因为全纯自同构群在很大程度上决定了区域上的一些分析的性质. 在本书中就是用单位圆的全纯自同构群定出 Poisson 核作为这方面的例子. 在本书中突出这三个全纯自同构群的另一个目的是:这三个群是最为简单又是十分重要的李群. 当然,在这本大学基础课教材中完全没有必要引入严格的李群的概念,但突出这三个简单的李群并给出它们的应用,等到读者接触到严格的李群的定义时,就会有"似曾相识"的感觉,且有一些简单的具体的李群在胸,对李群的抽象定义就易于了解与掌握了. 为了同一个目的,在本书的第 6 章中,给出了 C^2 中单位球与双圆柱上的全纯自同构群,并用它们证明了多复变中经典的 Poincaré 定理. 这样可以让读者在胸中又多了两个简单的具体的李群的例子.

如果说在本书第 2 章和第 3 章中给出这三个区域的全纯自同构群是指出了复分析与代数的关系,那么在本书的第 5 章中给出的复几何是指出了复分析与几何的关系.

Poincaré-Koebe 定理可以更确切地说成:

(1) 任一单连通的双曲型的开 Riemann 曲面都可以共形映射到单位圆;

(2) 任一单连通的抛物型的开 Riemann 曲面都可以共形映射到复平面 C;

(3) 任一单连通的闭 Riemann 曲面都可以共形映射到扩充复平面 C^*.

在第 5 章中,对这三个区域分别建立起它们的几何. 在单位圆上引入双曲

度量,即 Poincaré 度量;在 C 上引入抛物度量,即欧氏度量;在 C^* 上引入椭圆度量,即球度量.并对这三种复几何进行了简单的讨论,而这些内容现在应属于基础的部分了.

4. 上一段的讨论是涉及复分析与几何、代数的相互关系的一个例子,是说明数学的统一性的一个很好的事例.这里所说的几何不是初等几何,而是指微分几何、复几何.初等几何可以用来证明复平面上的一些初等的定理,但这属于中学教学的内容,当然不应该在本书中涉及.

用一个个事例来说明数学的统一性,不失为一种好的办法.尤其是在大学的基础课教材中,希望通过这些事例,让读者初步建立起这种看法.除了以上的例子外,本书中还有其他的一些事例.

在本书第 2 章 2.5 节中,给出了 Schwarz-Pick 引理,这使得经典的 Schwarz 引理有了微分几何的意义.这条引理说:将单位圆映到单位圆内的全纯映射,使两点之间的 Poincaré 度量不增.这是一个初等、自然而漂亮的对经典的 Schwarz 引理的几何解释.这是复分析与微分几何相互关联的一个很好的例子.

在第 5 章中用几何的方法来证明著名的 Picard 定理又是一个说明数学的统一性的很好事例.这种写法在国内或许也是首次出现在复分析的教材中. 1938 年,Ahlfors 建立了著名的 Ahlfors-Schwarz 引理.这条引理是作为近代微分几何进入复分析的标志而载入史册的,这是一条有历史意义的重要的引理.在本书第 5 章中,由此引理出发证明了重要的 Picard 定理.在传统的教材中,Picard 定理是不讲的,原因是这条定理原有的证明较难,要涉及椭圆模函数,讲起来较麻烦.但是 Picard 定理在分析中实在太重要了,而用微分几何的方法使证明变得较为简单,易于为大学生所了解与接受,所以在本书第 5 章中证明了这条定理.一方面让读者学到了重要的 Picard 定理,另一方面也让读者看到应用近代数学的微分几何的威力是何等之大,更重要的是使读者再一次体会到数学的统一性,各个分支之间的确是我中有你、你中有我啊!

在本书第 2 章 2.6 节中的 Poisson 积分公式是体现数学的统一性的又一事例.在上一段中已经说到:Poisson 积分公式是由单位圆的全纯自同构群得来的,本书之所以不用传统的分析的方法来给出这个公式,而用全纯自同构群来给出,是让读者能够看到群尤其是李群的威力.用了这样简单的群的概念,就十分利索地得到了重要的 Poisson 公式.而 Poisson 公式从复分析的角度来看,这是一种积分表示;从偏微分方程的角度来看,这是 Laplace 方程的 Dirichlet 问

题的解;从调和分析的角度来看,这是函数的 Fourier 级数的 Abel 求和. 同一件事,从不同的数学分支的角度来看,成了不同的事物. 这种观点十分重要,这正体现了数学各分支之间的相互渗透,这也体现了数学的统一性. 这种观点,常常导致从一个分支的结果产生出另一个分支的结果. 分支之间的成果相互启发,相互促进. 当然,Poisson 积分公式不过是体现这种思想的一个很简单的例子. 在大学教材中也只能举些简单的例子来体现这种思想. 在数学中,这种例子是很多的,有的是十分重要的. 典型的例子如 Riemann 曲面,从复分析的观点来看,Riemann 曲面是一维复流形,更确切些,是一维 Kähler 流形;从代数几何的观点来看,Riemann 曲面是一条代数曲线;从代数数论的观点来看,Riemann 曲面是一个一元代数函数域. 各种不同分支的交叉点又往往是数学中富有强大生命力、且极为重要的部分.

5. 本书的最后一章——第 6 章讲了一点多复变数. 这在传统教材中是不讲的,但数学发展到了今天,讲一点多复变数,既有必要又有可能. 在本书中讲一点多复变数的主要目的不是为了向读者初步地介绍多复变数的基本知识,因为如果要这样做,必须费很多的篇幅,作为一本大学基础课教材,当然无此必要. 本书之所以要讲一点多复变数的真正目的,是为了让读者更深刻地认识单复变数. 因为本书终究是一本大学单复变数的教材呀! 为此目的,当然要选择能使读者更深刻认识单复变数的有关多复变数的定理. 本书只选了如下的两条:一条是 Poincaré 定理;一条是 Hartogs 定理. 之所以选择这两条定理,是因为这两条定理的证明都不难,但又是很深刻的基本定理,而且能使人们更深刻地认识单复变数. Poincaré 定理说:$\boldsymbol{C}^2$ 中的超球与双圆柱不能全纯等价.(对 $\boldsymbol{C}^n$ 也一样成立,为叙述方便计,讨论 $\boldsymbol{C}^2$ 已足够,对 $\boldsymbol{C}^n$ 中定理的证明与 $\boldsymbol{C}^2$ 的情形无任何本质的区别.)这条定理告诉我们:Riemann 映射定理(拓扑等价导出全纯等价)只在单复变数中成立. 在这之前,在普通微积分中不可能有此定理;在这之后,在多复变数中也不可能有此定理. Riemann 映射定理只是单复变数中所特有的. 因此,这是一条十分深刻的定理. 作为复分析中三个组成部分之一的几何理论,同样也是单复变数中所特有的. 企图推广单复变数的几何理论到高维,必须另辟蹊径. 本书中介绍的另一条多复变数的定理是 Hartogs 定理. 这条定理说:若 $\Omega\subseteq\boldsymbol{C}^n$ $(n\geqslant 2)$ 为域,K 为 Ω 中的紧致子集,且 $\Omega\setminus K$ 连通. 若 f 在 $\Omega\setminus K$ 上全纯,则 f 可以全纯开拓到 Ω. 这条定理告诉我们:作为复分析中三个组成部分之一的 Weierstrass 级数理论,其核心部分的 Laurent 级数理论,在多复变数的情形一般是不可能存在的. 因此,用级数来刻画奇性,如何

定义亚纯函数等,在多复变数的情形,必须得另行考虑.因此,Weierstrass 级数中的核心部分,即 Laurent 级数是单复变数中所特有的.在其前,在普通微积分中不可能有;在其后,在多复变数中也不可能有;只有在单复变数中有.因此,这是十分深刻的理论.也就是说,作为单复变数三个组成部分中的两个组成部分的出发点,Riemann 映射定理与 Laurent 级数是前无古人,后无来者的! 本书是一本基础课教材,讲这样两条多复变数的定理已经足够了,再多讲就会偏离主题了.

在大学复变函数论中写一点多复变数的做法,在国内也许是首次出现在本书中,这种做法会被更多一些教材的编写者所采用.如前面提到的史济怀、刘太顺写的书,在该书的最后一章,也是讲一点多复变数,主要讲的也是 Poincaré 定理与 Hartogs 定理.他们将把多复变数写入教材中作为他们编著的书的两个特别要提到的内容的另一个而写在书的前言中.

6. 在本书重印版中,增加了三个附录.直接目的是为了弥补第 1 次印刷中的一些不足之处,但更主要的是:这三个附录中讲的都是近代数学中最为基本与重要的内容,而这在传统的复变函数论的教材中往往是不讲的.

第 2 章的附录是单位分解定理,这在证明本章 2.3 节定理 6 的(2)时要用到.如果不标出单位分解定理而直接写出一个函数来替代也可以过去,但单位分解定理在近代数学中太重要了,而且以后还会不断地用到,因此,宁肯花点篇幅写下这条定理与证明.

第 4 章的附录是 Riemann 曲面,给出了 Riemann 曲面的严格定义,这是为了与本章 4.5 节相呼应的.作为一本大学基础课教材,不可能花很多篇幅去深入探讨 Riemann 曲面的理论.但是 Riemann 曲面在近代数学中实在太重要了,它是一维复流形,不涉及流形恐怕很难涉及近代数学.写上这个附录,让读者能对 Riemann 曲面、复流形多一点认识,这也是好的.

第 5 章的附录是曲率,直接的目的是为了说明 5.1 节中(1.2)式定义的 K 为何是曲率.众所周知,曲率是微分几何中的核心部分,它在近代数学中扮演着极为重要的角色.因此,即使在大学微分几何课中学习了曲率的概念,也仍然值得花些篇幅来将这个重要的概念再说一遍.

这三个附录,如教学时间允许,则讲之;如教学时间不够,则略之.

不言而喻,加上这三个附录的另一个目的,是为了再次体现数学的统一性.

以上说了些本书与传统教材的不同之处,但我应重说一遍,这终究是一本大学基础课教材,本书的大部分写法仍然是传统的,与传统教材的不同之处只

是很有限的.在这不到200页的小书中,这些有限的不同之处却是撰写中最费心思的部分.我衷心盼望广大师生在用本书进行教学时充分注意到本书试图体现数学教学现代化以及数学统一性的愿望.

本书的写作意图曾在一些国内的学术会议上做过简要的介绍,反映较为热烈.本书出版后受到国内外广大同行的关注,不少年长的同行给了很多鼓励,更令人兴奋的是一大批年轻数学家对此书表现出较大的热情.不少大学用作教材或主要教学参考书,国外有的年轻的留学生看了此书后说:“如回国教复变,就用这本书,不要自己再写教材了.”本书对这门基础课教材的影响正在显现,例如,史济怀、刘太顺两位先生用本书作为教材进行教学后,在他们编著的教材中就有十分明显的反映.他们书中的亮点,大多可在本书中找到其相似或相同之处.相信会有更多的学校将采用本书作为教材或教学参考书.第1次印刷的3000册书已售罄,这些都促使我在重印本书时进行修订.为了保持本书原有的风格,只对本书的内容做了一些小的修改,为了使大家更好地使用本书,就唠唠叨叨地写下了这篇较长的重印说明.一些曾用此书作为教材进行教学的老师,将在教学过程中发现的问题与意见告诉了我,在此,向他们表示感谢.无可置疑,在重印的本书中,依然有很多缺点与毛病,还望广大师生及行家指正.

龚　昇
1999年9月于北京

前　言

这是一本大学数学系本科基础课复变函数论的教材,与目前国内通行的传统教材相差不是太多.

复变函数论已有两百多年的历史,是数学中既古老又成熟的一门学科.到目前为止,不知已出版了多少本内容精彩的教材,这些书各领风骚数十年.由于数学不断地前进,人们不断地用一些新的观点来重新认识与发展这门学科中原有的概念与理论,以致用各种不同观点撰写的新的教材不断涌现,以推陈出新.

这些年来,常有机会在美国的一些大学数学系教书,耳濡目染,接触到一些用各种观点所撰写的复变函数论教材,从而产生写一本中文的、与国内传统的复变函数论教材稍有一点不同的、有一点近代观点的教材的想法.这个想法由来已久,所以当 1991 年 4 月我准备回国时,就向中国科学技术大学数学系提出了这个想法,希望教一次这门基础课.回国后教学的实践是:来听课的学生愈来愈多,二、三、四、五年级都有,最后竟有四十多人.在教学效果上似乎皆大欢喜,不同年级的学生都感到各有收获.我很感谢这些来听课的学生,他们以及中国科大数学系一些同事的鼓励,促使我将讲稿出版.我也顾不得自己学问的浅薄,就按照讲课时的讲稿,略加修改补充,写成此书,这就是此书的来源.

这是一本基础课教材,有关领导部门规定的教学大纲中要求的内容大致上全有了,但这也是多少反映我对这门基础课的一些看法的教材,难免与国内传统的教材略有一点不同之处,好在允许每个人可以有不同的学术观点.如此书能抛砖引玉,则属喜出望外了.

复变函数论是复数域上的微积分,一些可以由实数域没有多大困难地推广到复数域上去的微积分的概念与结论,在本书中往往简略地叙述,或述而不证(见第 1 章).本书着重探讨一些在实数域上所没有,而在复数域上特有的那些性质与结果.

微分几何、微分方程、多复变数函数论以及其他一些近代数学的飞速发展,对单复变函数论的重新认识与发展影响较大.用各种观点来重新认识及撰写复

变函数论的书，近年来愈出愈多，看来这是一种趋势，本书也追随了这种趋势．例如，用了一点微分几何，从 Ahlfors-Schwarz 引理出发，导出 Liouville 定理，最后证明大、小 Picard 定理（见第 5 章）．又例如，用了一点一维 $\bar{\partial}$-问题的解来证明一些构造性定理，如 Mittag-Leffler 定理、插值定理等（见第 3 章）．又例如，强调变换群的概念，主要是自同构群的概念，在第 2 章、第 3 章和第 6 章中分别给出了一些最简单但最重要区域的全纯自同构群，并由此得到一些重要推论，如 Poincaré 定理等．在本书的第 6 章，十分粗浅地介绍了多复变数函数论的两个最基本的定理：Poincaré 定理和 Hartogs 定理．这不仅是对复变函数论的重新深刻的认识，也与这半个世纪来多复变数函数论的深入与飞速的发展关系极大，而且希望从单、多复变数函数论的实质区别的粗浅认识中，可以更深刻地了解与认识复变函数论中一些深刻的本质．作者希望：念过这本书的读者，将来如有机会接触到一些近代数学的分支，对其中一些想法、概念与定理，有个"似曾相识"的感觉．

本书取名《简明复分析》，是希望本书与拙作《简明微积分》一样，能写得提纲挈领，简单明了，但能否做到，由于作者才疏学浅，很可能力不从心，还望读者不吝赐教与指正．

此书是我在美国加州大学圣地亚哥校区及南伊利诺大学教书时写成的，它们为我提供了良好的工作条件，我愿向两校数学系以及 Carl Fitz Gerald 教授、何崇武教授表示感谢．

北京大学程民德、丁石孙教授对本书给予了热忱的支持．北京大学李忠教授审阅了书稿并提了宝贵意见，安徽大学郑学安教授在教学过程及本书撰写过程中给了我很多帮助，北京大学出版社刘勇同志与北京大学数学系刘燕同志为本书出版做了大量的工作，也一并表示感谢．

龚　昇
1992 年 9 月于加州圣地亚哥

目　录

第 1 章 微 积 分

1.1 回顾微积分

复变函数论是在复数域上讨论微积分.如同对任何数学进行推广那样,往往是一部分的内容可以没有多大困难地直接推广得到,而另一部分的内容却是推广后所独有的,是在原来实数域理论中所没有的.前一部分当然重要,但人们的兴趣往往更集中在后一部分,因为常常是这一部分才真正刻画了事物的本质.

在这一章中,先十分简单地回顾一下什么是微积分,然后看看微积分中哪些结果可以直接推广到复数域上去.而在以后的各章中,要着重讨论一些有本质不同、只在复数域上才特有的一些主要性质与结果.

什么是微积分?微积分由三个部分组成,即微分、积分以及联系微分、积分成为一对矛盾的微积分基本定理,即 Newton-Leibniz 公式.

众所周知,若 $y = f(x)$ 为定义在区间 (a, b) 上的一个函数,如果 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 在 (a, b) 中的一点 x 存在,则称 $f(x)$ 在这点可微,记此极限值为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $f'(x)$ 等,称为 $f(x)$ 在点 x 的微商;称 $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在点 x 的微分.如果函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上每一点都可微,则称函数在 (a, b) 上可微.另一方面,如果 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义,将 $[a, b]$ 分为任意 n 个小区间 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,而 ξ_i 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任一点,如果令 $n \to \infty$,且所有 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 的长度都趋于零,如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 存在,则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,记此

极限值为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.这就是微积分最最基本的定义及出发点，并且都有很明确的几何意义，微商是 $y=f(x)$ 所描绘的曲线在点(x,y)处的斜率，积分是曲线 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上的曲边梯形的面积.

微分、积分的概念古已有之，使之成为一门学问而发扬光大是由于 Newton 和 Leibniz 证明了微积分基本定理，即指出了微分与积分是一对矛盾.这条基本定理有两种相互等价的表述形式.

微积分基本定理(微分形式)　设函数 $f(t)$ 在区间$[a,b]$上连续，x 是$[a,b]$中的一点，令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

则 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$中可微，并且 $\Phi'(x)=f(x)$，即 $\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$.换句话说，若 $f(x)$ 的积分是 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)\mathrm{d}x$.

微积分基本定理(积分形式)　设 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$中可微，且$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$等于连续函数 $f(x)$，那么成立着

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)-\Phi(a)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

换句话说，若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的积分就是 $\Phi(x)$.

有了这个定理，求积分成为求微分的逆运算，而微分与积分的一些性质相互对应，成为一件事物的两个方面.例如：

$$\frac{\mathrm{d}(f(x)\pm g(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\pm\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

相对应；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g$$

与分部积分法

$$\int fg'\mathrm{d}x=fg-\int gf'\mathrm{d}x$$

相对应；

若 $u=f(y)$，$y=g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$$

相对应,等等.又例如微分中值定理:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可微,则在$[a,b]$中存在一点 c,使得

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

与积分中值定理:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$中存在一点 ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

是相互对应的.又例如,函数的Taylor展开,可以用微分来证明,并以微分形式表达其余项;也可以用积分来证明,并以积分形式来表达其余项,等等,不在此一一赘述了.

在微积分中一般讨论初等函数及其复合函数,所谓初等函数,是指下面三类函数,即:

(1) 幂函数 x^α,其中 α 为实数;多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,其中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为常数;有理分式 $\dfrac{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}{c_0+c_1x+\cdots+c_px^p}$,这里 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$,$c_i(i=0,1,\cdots,p)$ 为常数;以及其反函数.

(2) 三角函数 $\sin x$,$\cos x$ 等及其反函数,如 $\arcsin x$,$\arccos x$ 等.

(3) 指数函数 e^x,2^x 等及其反函数 $\ln x$,$\log_2 x$ 等.

而所谓函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开式及 Fourier 展开式,不过是用第(1)类中的多项式来逼近函数 $f(x)$,以及用第(2)类中的 $\sin nx$,$\cos nx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 等来逼近函数 $f(x)$.没有用第(3)类初等函数,即指数函数来逼近函数 $f(x)$ 的原因之一是下面即将讲到的Euler公式——指数函数可以表为三角函数.当然,一些重要的初等函数的 Taylor 级数是熟知的.例如:

$$\mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots, \tag{1.1}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, \tag{1.2}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, \tag{1.3}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots \quad (-1<x\leqslant 1), \tag{1.4}$$

$$(1+x)^r = 1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$(|x|<1, r \text{ 为实数}), \tag{1.5}$$

等等.

以上只是十分简单地回顾了一维微积分的大概,用这种观点来看待一维微积分,详细的叙述可参阅我所写的教材《简明微积分》中的有关部分(龚昇[1]).

至于高维的微积分,也有相应的三个部分,即微分、积分及联系微分与积分的微积分基本定理.只是在微分的部分有偏微分、全微分,而与微商相当的是 Jacobi 矩阵;在积分的部分有重积分、线积分、面积分等,这些都是一维微分与积分的自然推广,于是也可列出其相应的定理,这里不多叙述了.对第三部分要说几句话.在高维情形下,什么是微积分的基本定理?是什么定理刻画了在高维的情形下微分、积分是一对矛盾?回答是:Green 公式、Stokes 公式及 Gauss 公式.

Green 公式 若 D 为 Oxy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域,函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏微商,则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

Stokes 公式 设在空间中有曲面 Σ,边界是封闭曲线 L,函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 有一阶连续偏微商,则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Gauss 公式 设 V 是空间封闭曲面 Σ 所围成的闭区域,函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 V 上有一阶连续偏微商,则

$$\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.8}$$

这三个公式都刻画了在边界上积分与在内部积分的关系,如果用外微分形式,那么这三个公式可以统一成一个公式,称为 Stokes 公式.要十分严谨地叙述外微分形式需要很多篇幅,但这可以在很多微积分的教材中找到.拙著《简明微积分》就是用这种观点来写的.在这里只能十分简单地、形式地对三维欧氏空间中的外微分形式做一简介(龚昇[1]).

定义微分 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外乘积为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,它满足下面的规则:

(1) $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$,即两个相同微分的外乘积为零.

(2) $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$,即两个不同微分的外乘积交换次序差一符号.

当然,(1) 可以看成(2) 的推论.由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称

为外微分形式. 例如,若 P,Q,R,A,B,C,H 为 x,y,z 的函数,则

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

为一次外微分形式(由于一次没有外乘积,与普通的微分形式是一样的);

$$Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$$

为二次外微分形式;

$$Hdx \wedge dy \wedge dz$$

为三次外微分形式;而 P,Q,R,A,B,C,H 称为微分形式的系数. 对于外微分形式 ω 可以定义外微分算子 d,它是这样定义的:对于零次外微分形式,即函数 f,定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即普通的全微分算子. 对于一次外微分式形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$,定义

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

即对 P,Q,R 进行微分,然后进行外乘积. 通过外乘积运算规则,可得

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

对于二次外微分形式 $\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ 也是一样定义:

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

对于三次外微分形式 $\omega = Hdx \wedge dy \wedge dz$ 也是一样定义:

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

可以证明这恒等于零. 如果规定 $ddx = ddy = ddz = 0$,则外微分算子 d 与普通微分算子就是一样的了. 即对每一项进行运算,在每一项中分别对每一个因子进行运算,其余因子不动,将得出的各项相加,不同的只是外微分算子 d 是在运算之后进行外乘积. 由此立即得到重要的 **Poincaré 引理**:若 ω 为一外微分形式,其系数具有二阶连续偏微商,则 $dd\omega = 0$. 其逆也成立,即若 ω 是一个 p 次外微分形式,且 $d\omega = 0$,则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 α,使得 $\omega = d\alpha$.

有了外微分形式的概念,即定向的概念,那么(1.6)式中的 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 就为 $\iint\limits_D f(x,y)dx \wedge dy$ 或者 $\iint\limits_D f(x,y)dy \wedge dx$. 由于 L 取了逆时针的定向,故

$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 应为$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

同样,在外微分形式的观点下,即在定向的概念下,(1.7) 式中的$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 应为$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, (1.8) 式中的$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 应为$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

在此观点下,Green 公式、Stokes 公式与 Gauss 公式可以统一地写成

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\omega, \tag{1.9}$$

这里,ω 为外微分形式,$\mathrm{d}\omega$ 为ω 的外微分,Σ 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分区域,为封闭区域,$\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界,$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重积分.事实上,若 ω 为零次外微分形式,(1.9) 式就是 Newton-Leibniz 公式.若 ω 为一次外微分形式,在平面的情形,(1.9) 式就是 Green 公式;在三维空间,(1.9) 式为 Stokes 公式.若 ω 为二次外微分形式,(1.9) 式就是 Gauss 公式.(1.9) 式真正刻画了微分与积分是一对矛盾.这个公式不仅对三维欧氏空间成立,而且对任意高维的欧氏空间也成立.不仅如此,对于更一般的微分流形也是成立的,所以(1.9) 式是高维空间的微积分的基本定理.这个定理是微积分的顶峰与终点.

当然,这样回顾微积分是十分粗略的,但我想说清楚思路就可以了,不可能也不必要在此做十分仔细的叙述.

复变函数论是复数域上的微积分,是普通微积分的继续,公式(1.9) 成为本书的出发点之一也就是十分自然的事了.

1.2 复数域、扩充复平面及其球面表示

复数的全体组成复数域,它是实数域的扩充.

在初等代数中已经知道,**虚数单位** i 具有性质 $i^2 = -1$.将这一虚数单位与两个实数 α,β 用加、乘结合起来得到复数 $\alpha + i\beta$. α,β 分别称为这一复数的**实部**(real part) 与**虚部**(imaginary part).若记 $a = \alpha + i\beta$,则记 $\mathrm{Re}\, a = \alpha$, $\mathrm{Im}\, a = \beta$.两复数

相等当且仅当实部与虚部相等.复数的**四则运算**为

$$(\alpha + \mathrm{i}\beta) \pm (\gamma + \mathrm{i}\delta) = (\alpha \pm \gamma) + \mathrm{i}(\beta \pm \delta);$$

$$(\alpha + \mathrm{i}\beta)(\gamma + \mathrm{i}\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + \mathrm{i}(\alpha\delta + \beta\gamma);$$

若 $\gamma + \mathrm{i}\delta \neq 0$,则

$$\frac{\alpha + \mathrm{i}\beta}{\gamma + \mathrm{i}\delta} = \frac{(\alpha + \mathrm{i}\beta)(\gamma - \mathrm{i}\delta)}{(\gamma + \mathrm{i}\delta)(\gamma - \mathrm{i}\delta)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + \mathrm{i}(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

若复数 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$,则 $\alpha - \mathrm{i}\beta$ 称为 a 的**共轭**(conjugate)复数,记作 $\overline{a}$. 于是

$$\mathrm{Re}\, a = \frac{a + \overline{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, a = \frac{a - \overline{a}}{2\mathrm{i}},$$

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}.$$

$\overline{a}a = \alpha^2 + \beta^2$,记作 $|a|^2$,而 $|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 称为 a 的**绝对值**.显然

$$|a| \geqslant 0, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0),$$

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2\mathrm{Re}\, \overline{a}b, \quad |a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

等等.

对于平面上一个给定的直角坐标系来说,复数 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 可以用坐标为 (α, β) 的点来表示,第一个坐标称为实轴,第二个坐标称为虚轴,所在的平面称为复平面,记作 $\boldsymbol{C}$.

一个复数不仅可以用一点来表示,而且可以用一个由原点指向这点的向量来表示,这个复数、这个点、这个向量都以同一字母 a 来表示.与通常一样,任一向量作平行移动后得到的所有的向量都视为与原向量恒等.于是,复数的加法成为向量的加法.而复数的公式往往赋有几何意义,例如,$|a|$ 表示向量长度;$|a + b| \leqslant |a| + |b|$ 表示三角形两边之和大于第三边,等等.

对复数也可引入极坐标 (r, φ),复数 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.显然,$r = |a|$,$r$ 称为复数 a 的**模**,φ 称为复数 a 的**辐角**.如果

$$a_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1),$$

$$a_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2),$$

则

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

即 $r = r_1 r_2$,$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

将复数三角表达式中的辐角取值范围取为$0\leqslant\varphi<2\pi$.若$r>0$,则复数三角表达式就给出了$a\in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}$到$(r,\varphi)\in(0,+\infty)\times[0,2\pi)$之间的一一对应.记$\varphi=\arg a$,称此为复数$a$的**主辐角**.

主辐角$\arg a$可以看作定义在$\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$上的一个函数,它的值域是$0\leqslant\arg a<2\pi$.于是,$[0,+\infty)$上的点是都是$\arg a$的间断点.更一般地,$\arg a$的取值范围可取为

$$-\gamma\leqslant\arg a<2\pi-\gamma\quad(0\leqslant\gamma<2\pi).$$

当取定γ时,$\arg a$的定义域仍然是$\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$.但$\arg a$的间断集是射线$re^{-i\gamma}$ $(r\geqslant 0)$.

当$\varphi=\arg a$是a的主辐角时,对一切整数k,$\arg a+2k\pi$都是a的辐角.a的辐角的全体记作$\operatorname{Arg} a$,即

$$\operatorname{Arg} a=\{\arg a+2k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\}.$$

将它简记为

$$\operatorname{Arg} a=\arg a+2\pi\boldsymbol{Z},$$

其中$\boldsymbol{Z}$是整数集.再记

$$\operatorname{Arg}^{(l)} a=\arg a+2l\pi\quad(l\in\boldsymbol{Z}).$$

称$\operatorname{Arg}^{(l)} a$为$\operatorname{Arg} a$的第$l$个单位分支.特别地,$\operatorname{Arg}^{(0)} a=\arg a$.

辐角函数$\operatorname{Arg} a$将一个复数$a\neq 0$对应于一个无穷集合,这时我们称$\operatorname{Arg} a$是a的多值函数,它是定义在$\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$之上的.

在应用主辐角时,一定要先确定$\arg a$的值域.当取$-\gamma\leqslant\arg a<2\pi-\gamma$时,$\arg a$在$\boldsymbol{C}\backslash\{re^{-i\gamma}(r\geqslant 0)\}$上连续.

若$z=x+iy$,a为一固定的复数,r为一固定的实数,则$|z-a|=r$表示一个以a为中心,r为半径的圆周;$|z-a|<r$表示一个以a为中心,r为半径的圆盘,记作$D(a,r)$.同样,上半平面可以用$\operatorname{Im} z>0$来表示,右半平面可以用$\operatorname{Re} z>0$来表示,等等.

引入坐标,得到复平面$\boldsymbol{C}$,但如何来处理无穷远点?在复变数函数论中,我们引入一个点,叫无穷远点,记作∞,以此来扩展$\boldsymbol{C}$.对所有有限的复数$a\in\boldsymbol{C}$,$a+\infty=\infty+a=\infty$;对所有的$b\neq 0$,$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty$,$\frac{a}{0}=\infty$ $(a\neq 0)$及$\frac{b}{\infty}=0$,等等.$\boldsymbol{C}$中所有的点加上"∞",组成扩充复数平面,记作$\boldsymbol{C}^*$.即$\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$.在本书中,扩充复数平面指的就是$\boldsymbol{C}^*$.

要对扩充复数平面做个几何模型,在这个模型上一切扩充平面上的点都有一个具体的表示,这就是球面表示,它是通过球极平面投影(stereographic projection)得到的.

考察一个三维空间的单位球面 S^2,其方程为 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$(三维空间的直角坐标为 x_1, x_2, x_3),在 S^2 上的每一点,除了(0,0,1)以外,我们可用一复数

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3} \tag{2.1}$$

与之相对应,这个对应是一对一的.事实上,由(2.1)可得

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

因此得到

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}. \tag{2.2}$$

令无穷远点 ∞ 对应于(0,0,1),就完成了球面 S^2 上的点与扩充复数平面 $\boldsymbol{C}^*$ 上的点之间的一对一的对应.因此,可以把球面 S^2 作为扩充复数平面 $\boldsymbol{C}^*$ 的代表.球面 S^2 称为 **Riemann 球面**.显然,$x_3 < 0$ 的半球面对应于单位圆盘 $|z| < 1$,而 $x_3 > 0$ 的半球面对应于单位圆盘的外部 $|z| > 1$,等等.

如复平面为以 x_1 轴为实轴,x_2 轴为虚轴的(x_1, x_2)平面,则(2.1)式有明确的几何意义.

取 $z = x + \mathrm{i}y$,则由(2.1)式得

$$x : y : -1 = x_1 : x_2 : x_3 - 1.$$

这说明点($x, y, 0$),(x_1, x_2, x_3),(0,0,1)在一条直线上.因此,这个对应实际上是以(0,0,1)为中心的中心投影,将 S^2 上的点投影到 $\boldsymbol{C}^*$ 上,称这个投影为**球极平面投影**.在球面表示中,无穷远点不再有任何特殊了.

1.3 复 微 分

如同在普通微积分中那样,可以定义复数域上的复值函数 $w = f(z)$,这里,z,w 均为复数.为了有确切的意义,我们先限定 $f(z)$ 为单值的.也可以用 ε-δ 语言来定义函数的极限,即

$$\lim_{z \to a} f(z) = A$$

是指任给 $\varepsilon > 0$,存在一个正数 δ,对于所有的 z,只要 $|z - a| < \delta$ $(z \neq a)$,恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$.如果 $\lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$,则称 $f(z)$ 在 $z = a$ 处连续.

如同在普通微积分中那样，可以在复平面上定义开集、闭集、集合的连通性、紧致性，等等. 定义复平面中的曲线为区间$[\alpha,\beta]$上的连续复值函数 $\gamma(t)$：$\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，此处 $x(t)$，$y(t)$ 均为 t 的连续实函数. $\gamma(\alpha)$，$\gamma(\beta)$ 称为曲线 $\gamma(t)$ 的端点. 如果 $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$，则称 $\gamma(t)$ 为闭曲线. 曲线的方向就是 t 增加的方向. 如果 $\gamma'(t)$ 存在且连续，则称 $\gamma(t)$ 为光滑曲线. 如果 $\gamma'(t)$ 除去有限个 t 外是连续的，在这有限个 t 处，$\gamma(t)$ 有左、右导数，则称 $\gamma(t)$ 为分段光滑曲线. 分段光滑曲线是可求长的. 若曲线 $\gamma(t)$ 仅当 $t_1=t_2$ 时 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称 $\gamma(t)$ 为简单曲线，或 Jordan 曲线. 若 $\gamma(t)$ 同时是闭曲线，则称 $\gamma(t)$ 为简单闭曲线或 Jordan 闭曲线.

复平面上的一个点集 D 称为一个域，如果

(1) D 为开集；

(2) D 为连通的，即 D 中任意两点均可用完全位于 D 中的曲线把它们连接起来.

下面的事实是直观的，但证起来却很复杂，故述而不证.

Jordan 定理　一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个域，其中一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部，γ 是这两个域的共同边界.

域 D 的边界记作∂D. 域 D 称为**单连通**的，如果 D 内任何简单闭曲线的内部仍属于 D. 不是单连通的域称为**多连通域**. 由两条 Jordan 闭曲线所围成的域是二连通域，由 n 条 Jordan 闭曲线所围成的域是 n 连通域，这些闭曲线可能退化成为一个点或一条 Jordan 曲线. 此外，如同实数域的情形那样，可以证明 Heine-Borel 定理、Bolzano-Weierstrass 定理等等，这里只叙不证.

Heine-Borel 定理　若 A 为紧集，G 为 A 的开覆盖，则从 G 中可以选出有限个开集覆盖 A.

Bolzano-Weierstrass 定理　任一无穷集至少有一极限点.

若 $D\subset\mathbf{C}$ 是域，称 $f(z)$：$D\subset\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 为复变函数. 从实分析的观点来看，$f(z)$ 不过是实的二元向量值函数. 所以，复数列的极限，复变函数的极限，连续，偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\cdots$，微分，积分等等，都已在多元微积分中给出了. 于是，相应的有关的定理也已在多元微积分中给出了. 但我们摒弃这种办法来讨论复变函数，而是用复分析的观点来讨论复变函数.

现在来讨论复变数复值函数的导数. 若 $w=f(x)$，那么自然考察 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$，这里，$h$ 为复数. 如果这个极限对于所有的 $h\to0$ 都存在且

相同,则称 $f(z)$ 在 z 点可微,记作$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$或$f'(z)$,称为 $f(z)$ 在 z 点的微商或导数.如果 $f(z)$ 在其定义域上每一点都可微,则称 $f(z)$ 为其定义域上的**解析函数**(analytic function)或**全纯函数**(holomorphic function).这个定义是与普通微积分中微商的定义相一致的.因此,复微商的四则运算、复合函数的微商等公式也是相一致的.这些公式读者可以立即写出来.但复微商终究是在复平面上进行,所以这里有一些特殊的地方.

若

$$f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

在点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处可微,则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

对任意途径的 $z \to z_0$ 都存在且相等,特别对于 z 沿着平行于坐标轴的途径趋于z_0也应存在且相等.先令 $z = x + \mathrm{i}y_0, x \to x_0$,则

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + \mathrm{i}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right] \\ &= u_x(x_0,y_0) + \mathrm{i}v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

再令 $z = x_0 + \mathrm{i}y, y \to y_0$,则

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y\to y_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)} + \frac{v(x_0,y)-v(v_0,y_0)}{y-y_0}\right] \\ &= v_y(x_0,y_0) - \mathrm{i}u_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

这里,u_x, u_y, v_x, v_y 分别表示u对x,y的偏导数和v对x,y的偏导数.两式比较实部与虚部,即得:u,v 在点(x_0,y_0)处应满足

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{3.1}$$

(3.1)式也可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.2}$$

方程(3.1)及(3.2)都称为 Cauchy-Riemann 方程,简称 C-R 方程.C-R 方程为 $f(z)$ 在一点 $z = z_0$ 处可微的必要条件,但不充分.例如:

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = \sqrt{|xy|}$$

在 $z = 0$ 处满足 C-R 方程,但不可微.因为若取 $x = \alpha t, y = \beta t$,则

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+\mathrm{i}\beta},$$

令 $z \to 0$,极限不唯一.

但有如下的

定理1 函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在域D内全纯的充要条件是:u,v在D内有一阶连续偏微商,且满足C-R方程(3.1).

证明 *必要性* 若$f(z)$在$z=z_0$处可微,则满足(3.1)式已证.在第2章2.3节中将证明,全纯函数的微商也是全纯函数,故$f'=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$也是连续函数.

充分性 设u,v在点$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处有一阶连续偏微商,且满足C-R方程(3.1). 记$\alpha=u_x(x_0,y_0),\beta=v_x(x_0,y_0)$,那么

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\alpha(x-x_0)-\beta(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|),$$

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\beta(x-x_0)+\alpha(y-y_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

其中$|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$满足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0.$$

将第二式乘以i后与第一式相加,得到

$$f(z)-f(z_0)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+\mathrm{i}\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

即为

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(\alpha+\mathrm{i}\beta)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+\mathrm{i}\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+\mathrm{i}\beta,$$

即

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0).$$

定理证毕.

在第2章2.3节中将证明:如$f(z)=u+\mathrm{i}v$在域D内全纯,则其微商$f'(z)$也是D内的全纯函数,所以u,v的二阶偏微商也是连续的,因而二阶混合偏微商$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$是相等的.由C-R方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

因此得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

这个方程称为 Laplace 方程. 它是偏微分方程理论中三个最基本的偏微分方程之一,即椭圆型方程的典型方程,记作

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

此处

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

满足 $\triangle u=0$ 的函数 u 称为调和函数,即全纯函数 $f=u+\mathrm{i}v$ 的实部与虚部均为调和函数.

这里引入两个重要的微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

可以这样来理解这两个算子.

由于 $z=x+\mathrm{i}y,\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,于是 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),y=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(z-\bar{z})$. x,y 的函数 $f(x,y)$ 可以考虑为 z 及 $\bar{z}$ 的函数,把 z 及 $\bar{z}$ 看做自变数(它们实际上是互相共轭的,但暂不注意此点),如微分法则可用,则可得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

应用这个记号,则一个函数 f 是全纯的当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. 不妨说,一个全纯函数与 $\bar{z}$ 无关,而只是 z 的函数,所以全纯函数可以看做确是一个复变数 z 的函数,而不称之为两个实变数复值函数. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 又等价于 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}$. 应用这些记号,则 $\triangle=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}$.

若 $f(z,\bar{z})=u(z,\bar{z})+\mathrm{i}v(z,\bar{z})$,则

$$\mathrm{d}f(z,\bar{z})=\mathrm{d}u(z,\bar{z})+\mathrm{i}\,\mathrm{d}v(z,\bar{z}).$$

由于 $u(z,\bar{z}),v(z,\bar{z})$ 都是实变数 x,y 的实值函数,故

$$\mathrm{d}u(z,\bar{z})=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v(z,\bar{z})=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

于是

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

由于

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z}),$$

代入上式,即得

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{3.3}$$

若记

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

则上式成为

$$df = \partial f + \bar{\partial} f,$$

于是,有

$$d = \partial + \bar{\partial}. \tag{3.4}$$

这就得到了复变函数 f 的全微分.这也可以将 $z, \bar{z}$ 看做独立变数直接得到.

复微商有很好的几何性质,即共形性.

设函数 $f(z)$ 在域 D 内全纯,$z_0 \in D$,$f'(z_0) \neq 0$,$\gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 为 D 内过点 z_0 的一条光滑曲线,且 $\gamma(0) = z_0$,$\gamma(t)$ 在点 z_0 的切线与实轴的夹角为 $\arg \gamma'(0)$. $f(z)$ 把 $\gamma(t)$ 映为过点 $w_0 = f(z_0)$ 的光滑曲线 $\sigma(t) = f(\gamma(t))$,于是 $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$,$\sigma'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$,$\sigma(t)$ 在点 w_0 的切线与实轴的夹角为

$$\arg \sigma'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(0),$$

此即为

$$\arg \sigma'(0) - \arg \gamma'(0) = \arg f'(z_0).$$

即 $\sigma(t)$ 在点 w_0 处切向量的辐角与 $\gamma(t)$ 在点 z_0 处切向量的辐角之差总是 $\arg f'(z_0)$,与 $\gamma(t)$ 无关. 因此,过点 z_0 的任意两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$,$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$,它们在 $f(z)$ 映射下的像分别是过点 $w_0 = f(z_0)$ 的光滑曲线 $\sigma_1(t)$ 与 $\sigma_2(t)$. 于是

$$\arg \sigma_2'(0) - \arg \gamma_2'(0) = \arg \sigma_1'(0) - \arg \gamma_1'(0),$$

即

$$\arg\sigma_2'(0)-\arg\sigma_1'(0)=\arg\gamma_2'(0)-\arg\gamma_1'(0).$$

所以 $\gamma_1(t)$ 与 $\gamma_2(t)$ 在点 z_0 处的夹角等于 $\sigma_1(t)$ 与 $\sigma_2(t)$ 在点 $w_0=f(z_0)$ 处的夹角,也就是说,在映射 $w=f(z)$ 之下,在微商不为零的点处,两条光滑曲线的夹角的大小及旋转方向是保持不变的,此为 $f(z)$ 在 z_0 处的保角性.

另一方面,由于

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

任取过 z_0 点的曲线 $\gamma(t)$,在映射 $f(z)$ 下成为 $\sigma(t)$,那么

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|.$$

即像点之间的距离与原来两点之间的距离之比的极限与曲线无关,称 $|f'(z_0)|$ 为 $f(z)$ 在点 z_0 处的伸长度.因此,任意一个以 z_0 为顶点的小三角形,经过 $f(z)$ 映射后,成为一曲边三角形,它们的微分三角形是相似的.上述两个性质加在一起,称为共形性.所以我们称在 D 上的全纯映射为**共形映射**(若 $f'(z)\neq 0$),在第 4 章中,我们要详细讨论之.

1.4 复 积 分

如果 $f(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 为一个在实区间$[a,b]$上定义的复值函数,则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

设 γ 是一个可求长曲线,$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$,$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y$,则

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z&=\int_\gamma(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y)\\&=\int_\gamma u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

特别当 γ 是一个分段可微弧段时,其方程为 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,$f(z)$ 在 γ 上定义且连续,则 $f(z(t))$ 也是 t 的连续函数.令

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t,$$

作为 $f(z)$ 沿复曲线 γ 上积分的定义,这是一个参数变换下不变的积分.如有增函

数 $t = t(\tau)$ 将 $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ 映为 $a \leqslant t \leqslant b$，$t(\tau)$ 为逐段可微，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))\frac{\mathrm{d}z(t(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

如果用 Riemann 和来定义线积分，也可获得同样的结果. 于是有与普通线积分一样的性质，例如：

$$\int_{-\gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z;$$

如 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$，则

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

所以对复积分没有太多可以说的了.

那么，对应于微积分的第三部分，应是怎样的？在复平面上，对应的是复形式的 Green 公式，现在尽量用一般通行的符号来书写之. 为此，我们用复的外微分形式，视 $z, \bar{z}$ 为独立变量，定义微分的外乘积为

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0,\quad \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0,\quad \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z,$$

这里

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z &= (\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\ &= -\mathrm{i}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}A,\end{aligned}$$

这里，$\mathrm{d}A$ 为二维面积元素. 如同实的情形那样，定义零次外微分形式为函数 $f(z,\bar{z})$；一次外微分形式为 $\omega_1\mathrm{d}z + \omega_2\mathrm{d}\bar{z}$，这里 ω_1, ω_2 为 $z, \bar{z}$ 的函数；二次外微分形式为 $\omega_0\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$，这里 ω_0 为 $z, \bar{z}$ 的函数；定义外微分算子 d，它作用在外微分形式 ω 上，定义为

$$\mathrm{d}\omega = \partial\omega \wedge \mathrm{d}z + \bar{\partial}\omega \wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

这里 $\bar{\partial}, \partial$ 与(3.4)式中的定义相同. 显然也可以证明 $\mathrm{dd}\omega = 0$ 对任意外微分形式 ω 都成立. 于是，复形式的 Green 公式为

定理 2　若 $\omega = \omega_1\mathrm{d}z + \omega_2\mathrm{d}\bar{z}$ 为域 Ω 上的一次外微分形式，这里，$\omega_1 = \omega_1(z,\bar{z})$，$\omega_2 = \omega_2(z,\bar{z})$ 均为 $z, \bar{z}$ 的可微函数，d 为外微分算子，即 $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$，这里，d，$\partial$ 与 $\bar{\partial}$ 由(3.4)式定义. 记 Ω 的边界为 $\partial\Omega$，则

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \iint_{\Omega} d\omega. \tag{4.1}$$

证明 若 $\omega_1 = \xi_1 + i\eta_1, \omega_2 = \xi_2 + i\eta_2$，这里，$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ 均为实值函数. 于是

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z} \\
&= (\xi_1 + i\eta_1)(dx + i\,dy) + (\xi_2 + i\eta_2)(dx - i\,dy) \\
&= [(\xi_1 + \xi_2)dx + (-\eta_1 + \eta_2)dy] + i[(\eta_1 + \eta_2)dx + (\xi_1 - \xi_2)dy].
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
d\omega &= \partial(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) + \bar{\partial}(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) \\
&= \frac{\partial\omega_1}{\partial z}dz \wedge dz + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}}d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial\omega_2}{\partial\bar{z}}d\bar{z} \wedge d\bar{z} \\
&= \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)d\bar{z} \wedge dz \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi_1 + i\eta_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi_2 + i\eta_2)\right]2i\,dA \\
&= \left[-\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y} + \frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \frac{\partial\xi_2}{\partial y} - \frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x} - \frac{\partial\eta_1}{\partial y} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x} - \frac{\partial\eta_2}{\partial y}\right)\right]dA.
\end{aligned}$$

由 Green 公式，显然有

$$\int_{\partial\Omega}(\xi_1 + \xi_2)dx + (-\eta_1 + \eta_2)dy = \iint_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi_1 + \xi_2)\right]dA$$

及

$$\int_{\partial\Omega}(\eta_1 + \eta_2)dx + (\xi_1 - \xi_2)dy = \iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\xi_1 - \xi_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta_1 + \eta_2)\right]dA,$$

所以(4.1) 式是成立的.

公式(4.1) 在高维复欧氏空间上也成立，在复流形上也成立，所以这是一般形式的特例，这个一般形式也叫做 Stokes 公式. 公式(4.1) 是下一章的出发点之一.

1.5 复数级数

此外，我们可以看到微积分中的级数理论有一部分也可以无困难地推广到复数域.

例如，函数序列$\{f_n(z)\}$在集合$E \subset \boldsymbol{C}$上一致收敛于$f(z)$是指：对任给的$\varepsilon > 0$，一定存在一个只依赖于ε，而不依赖于z的n_0，使得对所有的$n \geqslant n_0$和所有的$z \in E$，都有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

如同在微积分中一样，可以证明：

一个一致收敛的连续函数序列，其极限函数本身也是连续的.

Cauchy 判别准则 函数序列$\{f_n(z)\}$在集合$E \subset \boldsymbol{C}$上一致收敛的充要条件是：对于任给的$\varepsilon > 0$，一定存在一个只依赖于ε，而不依赖于z的n_0，使得对所有的$m, n \geqslant n_0$和所有的$z \in E$，都有

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Weierstrass M-判别法 若函数项级数

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

在集合$E \subseteq \boldsymbol{C}$上定义，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$为一正项级数.若存在$n_0$及常数$M > 0$，当$n > n_0$时，对所有$z \in E$使得$|f_n(z)| \leqslant Ma_n$都成立.如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛.

特别考虑幂级数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \tag{5.1}$$

有如下的

定理 3(Abel 定理) 对于幂级数(5.1)，存在一个数R $(0 \leqslant R \leqslant \infty)$，称为它的收敛半径，具有下列性质：

(1) 对于每一个使$|z| < R$的z，级数绝对收敛.如果$0 \leqslant \rho < R$，则对于$|z| \leqslant \rho$，级数一致收敛.

(2) 如果z满足$|z| > R$，则级数的项无界，级数发散.

(3) 在$|z| < R$内，级数的和是一个全纯函数，它的导数可以通过逐项微商求得.所得的级数与原级数有相同的收敛半径.

圆$|z| \leqslant R$称为收敛圆.在收敛圆周上，收敛性不一定.R可取为

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5.2}$$

这称为收敛半径的 Hadamard 公式.

当$R = 0$时，级数(5.1)除了$z = 0$点外是发散的；

当$R = \infty$时，级数(5.1)处处收敛.

现在来证明定理 3.

证明 如果 $|z|<R$,则可找到 ρ,使得 $|z|<\rho<R$,于是 $\frac{1}{\rho}>\frac{1}{R}$. 由(5.2)式,存在一个 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $|a_n|^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{\rho}$,即 $|a_n|<\frac{1}{\rho^n}$,故当 $n\geqslant n_0$ 时,$|a_nz^n|<\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ 当 $|z|<\rho$ 时收敛,由 Weierstrass M- 判别法知,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛. 为了证明级数在 $|z|\leqslant\rho$ $(\rho<R)$ 中的一致收敛性,选取 ρ',n_1,使得 $\rho<\rho'<R$. 对于 $n\geqslant n_1$,$|a_nz^n|\leqslant\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ 成立,由 Weierstrass M- 判别法,知级数(5.1)在 $|z|\leqslant\rho$ 中一致收敛.

如果 $|z|>R$,取 ρ 使得 $R<\rho<|z|$. 由于 $\frac{1}{\rho}<\frac{1}{R}$,故存在一个 n_2 及子列 $\{m_i\}$,使得当 $m_i\geqslant n_2$ 时,$|a_{m_i}|^{\frac{1}{m_i}}>\frac{1}{\rho}$,即 $|a_{m_i}|>\frac{1}{\rho^{m_i}}$. 于是有无穷多个 n,使 $|a_nz^n|>\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$,故级数项无界.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 有相同的收敛半径,这是因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

对于 $|z|<R$,记

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=S_n(z)+R_n(z),$$

这里

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\quad R_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kz^k.$$

令

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n{}'(z),$$

要证明 $f_1(z)=f'(z)$.

取 $0<\rho<R$,任意取定一点 z_0,$|z_0|<\rho$. 由于

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z)=\left(\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n{}'(z_0)\right)+(S_n{}'(z_0)-f_1(z))+\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0},$$

若 $z \neq z_0$，且 $|z| < \rho < R$，则上式右边最后一项可写为

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z z_0{}^{k-2} + z_0{}^{k-1}),$$

故

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k \mid a_k \mid \rho^{k-1}.$$

这是一个收敛级数的余项，故存在 n_3，当 $n \geqslant n_3$ 时，有

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $f_1(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n{}'(z)$，故存在 n_4，使得 $n \geqslant n_4$ 时，有 $| S_n{}'(z_0) - f_1(z) | < \varepsilon/3$. 取固定的 $n > n_3, n > n_4$，由微商的定义，可以找到 $\delta > 0$，使得当 $0 < | z - z_0 | < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n{}'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

综合上面各式，得到：当 $0 < | z - z_0 | < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| < \varepsilon.$$

这就证明了 $f'(z_0) = f_1(z_0)$. 定理3证毕.

这种推理可重复进行，得到

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} z^2 + \cdots,$$

对任意正整数 k 都成立. 由此可得 $a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$，故幂级数可以写成

$$f(z) = f(0) + f'(0) z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots,$$

这是 Taylor-Maclaurin 级数. 这是在 $f(z)$ 具有一个幂级数展开式这个假定下证明的，即如果展开式存在则唯一确定. 在下一章中将证明：每一个全纯函数都具有一个 Taylor 展开式.

最后，叙述两条有关函数项级数的结果.

定理4 (1) 若 $\{f_n(z) \ (n = 1,2,\cdots)\}$ 在集合 A 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 A 上一致收敛到 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 A 上连续.

(2) 若 $\{f_n(z) \ (n = 1,2,\cdots)\}$ 在可求长曲线 γ 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z.$$

这两个结果与微积分中有关函数项级数的定理是完全一样的，证明也是一样的，故证明从略.

1.6 初 等 函 数

在微积分中，初等函数是由三类函数以及它们的复合函数所构成的.这三类函数是：

(1) 幂函数、多项式、有理分式及其反函数；

(2) 三角函数及其反函数；

(3) 指数函数及其反函数，即对数函数.

在复数域中如何定义这三类函数?有些是容易做到的，例如，对于多项式只要将实变数换成复变数即可.但另外一些函数，如 $\sin z$，当 z 是复数时，这是什么意义?又例如 e^z，当 z 是复数时，这又是什么意义?这些必须重新定义，既要有确切的意义，又要当变数为实数时与原来的定义相一致.一个自然的想法是用级数来定义.

若 y 为实数，则

$$\mathrm{e}^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots.$$

十分自然地去定义

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= 1 + \frac{\mathrm{i}y}{1!} + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{\mathrm{i}y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right).\end{aligned}$$

但是，我们知道

$$1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots = \cos y,$$

$$\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots = \sin y,$$

所以就有

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{6.1}$$

这就是著名的 Euler 公式.

这就建议:对于任意的复数 $z=x+iy$,定义

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y). \tag{6.2}$$

于是,(6.1)式是(6.2)式的推论.(6.1)式是非常重要的公式,它告诉我们指数函数与三角函数之间是可以相互表示的.由(6.1)式即得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

由此建议我们:对于任意的复数 $z=x+iy$,定义

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{6.3}$$

当然由此可以定义:$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$,等等.由(6.3)式立得,若 y 为实数,则 $\cos(iy)=\cosh y,\sin(iy)=i\sinh y$.

由定义(6.2)可以定义 e^z 的反函数 $\mathrm{Ln}\,z$,这可以定义为:满足 $e^w=z$ 的复数 w 称为 z 的对数,记作 $\mathrm{Ln}\,z$.同样,由定义(6.3)可以定义 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的反函数 $\arccos z$ 及 $\arcsin z$ 等.

对于幂函数 z^α,当 α 为整数时,其意义是明确的.对于任意的复数 α,十分自然地可定义

$$w=z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}. \tag{6.4}$$

由(6.2)、(6.3)及(6.4)定义的函数的性质,下面还将进一步讨论.但从这里可以看出,微积分中看来互相不相关的三类初等函数,在复数域中成了一类,即指数函数及其反函数,而三角函数及其反函数、幂函数及其反函数均可以由此来表达.之所以能这样做,关键的一步是公式(6.1),即 Euler 公式,这是一个十分深刻的公式.例如,当 $y=\pi$ 时,(6.1)式成为 $e^{i\pi}=-1$,这是联系了数学中四个重要的常数 $e,\pi,i,-1$ 的一个公式.又例如,有用的 De Moivre 公式

$$(\cos y+i\sin y)^n=\cos ny+i\sin ny$$

是(6.1)式的自然推论等.

下面来看看这样定义的初等函数的性质.

先看指数函数,由定义(6.2)立得

(1) 指数函数不取零值,$e^z\neq 0$.这是因为 $|e^z|=e^x>0$.

(2) 对于任意 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,有 $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.这是因为

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(3) e^z 以 $2\pi i$ 为周期.这是因为 $e^{2\pi i} = 1$.

(4) e^z 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯,且 $(e^z)' = e^z$.这是因为由(6.2)式,得

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x\sin y,$$

故

$$u_x = v_y = e^x\cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x\sin y$$

都是在 $\boldsymbol{C}$ 上的连续函数,由定理 1,e^z 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯,且

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

以上可见,在实数域中 e^x 的主要性质在复数域中依然成立.

如果将 $w = f(z)$ 看做由 z 平面上一个区域到 w 平面上一个区域的映射,映射称为单叶的,如果映射是一对一的.

(5) e^x 的单叶性区域,即在怎样的区域上 e^z 看做映射可以建立起一一对应.

设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 使 $e^{z_1} = e^{z_2}$ 成立,即

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

成立,也就是 $e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$ 成立.因此,$x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 2k\pi$,即 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$,其中 k 为整数.取带域 $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 作为 e^z 的单叶区域,例如取 $z = x + iy$ $(0 < y < 2\pi)$,则 e^z 将此带域单叶地映为 $\boldsymbol{C}$ 上去掉正实数轴的域 $E = \boldsymbol{C}\backslash\{z \mid z \geqslant 0\}$.

(6) 由指数函数的性质(4),$(e^z)' = e^z$,立得 e^z 的 Taylor 级数

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

由 Hadamard 公式,这个级数是在全平面收敛的.

再看看指数函数的反函数,即对数函数.

对于 $z \neq 0$,满足 $e^w = z$ 的复数 w 称为 z 的对数,记作 $\operatorname{Ln} z$.由于指数函数的周期性,$\operatorname{Ln} z$ 是(无穷)多值函数.

设

$$z = re^{i\theta}, \quad w = u + iv,$$

则

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

得到 $e^u = r, v = \theta + 2k\pi$ (k 为整数).所以

$$w = \ln r + (\theta + 2k\pi)i,$$

或记作

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z,$$

这里，$\mathrm{Arg}\, z = \theta + 2k\pi$ 为 z 的辐角.

对数函数有性质

$$\mathrm{Ln}\, z_1 z_2 = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,$$

这是因为 $\mathrm{Arg}\, z_1 z_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$.

由对指数函数的讨论知道，若在域 D：$\boldsymbol{C}\setminus\{z \mid z \geqslant 0\}$ 上，z 的辐角取主值 $0 < \arg z < 2\pi$，那么函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的第 k 个分支 $w_k(z) = \mathrm{Ln}^{(k)}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 把 D 单叶地映为平行于实轴的带域 E_k：$2k\pi < v < 2(k+1)\pi$. 它们都是指数函数 $z = \mathrm{e}^w$ 的反函数，且在域 D 内全纯，并且有 $w_k' = \dfrac{1}{z}$. 称 $w_0(z) = \mathrm{Ln}^{(0)}(z) = \mathrm{Ln}|z| + \mathrm{i}\arg z$ 为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的主值分支，记作 $\ln z$，即

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

一般地，$\arg z$ 的取值范围也可以是

$$-\alpha \leqslant \arg z < 2\pi - \alpha \quad (0 \leqslant \alpha < 2\pi).$$

再看三角函数，由定义(6.3)立得

(1) $\cos z$，$\sin z$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯，且

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(2) $\cos z$，$\sin z$ 以 2π 为周期，即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(3) $\cos z$ 为偶函数，$\sin z$ 为奇函数，即

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(4) 和角公式成立，即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

(5) $\cos z$ 与 $\sin z$ 的基本关系式

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

成立.

(6) $\sin z$ 仅在 $z = k\pi$ 处为零，$\cos z$ 仅在 $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 处为零，这里，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

以上可见,实数域上定义的$\sin x$,$\cos x$的主要性质在复数域上依然成立.但是,$\cos x$,$\sin x$ (x 为实数)与$\cos z$,$\sin z$ (z 为复数)还是有不同之处.

(7) $|\sin z|$ 与 $|\cos z|$ 是无界的.这是由于性质(4),得

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= |\sin(x+\mathrm{i}y)|^2 = |\sin x\cos(\mathrm{i}y)+\cos x\sin(\mathrm{i}y)|^2\\ &= |\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y|^2 = \sinh^2 y+\sin^2 x,\end{aligned}$$

这是一个无界函数.同样

$$|\cos z|^2 = \cosh^2 y-\sin^2 x,$$

这也是一个无界函数.

(8) $\sin z$ 与 $\cos z$ 的单叶性域.

先考察 $w=\cos z=\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}$,这是三个函数 $\xi=\mathrm{i}z$,$\zeta=e^{\xi}$,$w=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$的复合.第一个函数只是旋转,故映射处处单叶.第二个函数单叶的充要条件为:ξ平面上的域不包含满足$\xi_2-\xi_1=2k\pi\mathrm{i}$的两点$\xi_1$,$\xi_2$,这里$k$为整数,此即为:在$z$平面上的域不包含$z_1-z_2=2k\pi$的两点.第三个函数单叶的充要条件为:在$\zeta$平面上,不包含$\zeta_1\zeta_2=1$的两点$\zeta_1$与$\zeta_2$,在$z$平面上就是不包含满足条件$e^{\mathrm{i}z_1}\cdot e^{\mathrm{i}z_2}=1$,即$z_1+z_2=2k\pi$的两点.因此,带域$0<\mathrm{Re}\,z<\pi$就可作为$\cos z$的单叶区域.

$\xi=\mathrm{i}z$将$0<\mathrm{Re}\,z<\pi$单叶地映为$0<\mathrm{Im}\,z<\pi$,$\zeta=e^{\xi}$又将后一带域单叶地映为上半平面$\mathrm{Im}\,\zeta>0$,最后$w=\dfrac{1}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$又将上半平面映为除去实轴上$-\infty<u\leqslant-1$和$1\leqslant u<+\infty$的整个$w$平面,即$w=\cos z$将$0<\mathrm{Re}\,z<\pi$单叶地映为$w$平面上去掉$-\infty<u\leqslant-1$,$v=0$及$1\leqslant u<+\infty$,$v=0$的域.

同样可以考虑 $w=\sin z$,$w=\tan z$ 等.

由定义(6.3),得到$\cos z$及$\sin z$的 Taylor 展开式为

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots.$$

由 Hadamard 公式,这三个级数是在全平面上收敛的.

再来看看反三角函数.先看 $w=\arccos z$,即$\cos w=z$.由于

$$\cos w=\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}w}+e^{-\mathrm{i}w})=z,$$

这是$e^{\mathrm{i}w}$的二次方程,有根$e^{\mathrm{i}w}=z\pm\sqrt{z^2-1}$.即

$$w = \arccos z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$
$$= \pm\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

所以 arccos$z$ 有无穷多值，这反映了 cos$w$ 的周期性. 另一方面，arcsin$z$ 可定义为$\frac{\pi}{2}$ − arccos$z$.

最后看看幂函数.

由定义(6.4)，若 $\alpha = a + \mathrm{i}b$，则

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)[\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)]}$$
$$= \mathrm{e}^{a\ln|z|-b(\arg z+2k\pi)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[b\ln|z|+a(\arg z+2k\pi)]},$$

这里，k 为任意整数. 记

$$\rho_k = \mathrm{e}^{a\ln|z|-b(\arg z+2k\pi)},$$
$$\theta_k = b\ln|z| + a(\arg z + 2k\pi),$$

则

$$w = z^\alpha = \rho_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \quad |w| = \rho_k.$$

因此，若 $b \neq 0$，则 $w = z^\alpha$ 是无穷多值函数；若 $b = 0$，则 α 为实数 a，而

$$w = z^\alpha = \mathrm{e}^{a\ln|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)a} = |z|^a \mathrm{e}^{a(\arg z+2k\pi)\mathrm{i}}.$$

这时，z^α 的值都在圆周 $|w| = |z|^a$ 上，所以

(1) 当 $\alpha = a = n$ 为整数时，$z^\alpha = z^n$ 是单值的；

(2) 当 $\alpha = a = p/q$ 为既约分数，且 $0 < p < q$，p,q 为正整数时，有

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)} = |z|^{\frac{p}{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}\arg z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{q}2k\pi}.$$

由于$\frac{p}{q}2k\pi$ 仅当 $k = 0,1,2,\cdots,q-1$ 时，这 q 个值关于 2π 是不同余的，而 k 取其他值，其相应的值均与上述 q 个值中的某一个关于 2π 是同余的，故对于给定的 z，z^α 只有 q 个不同的值；

(3) 当 $\alpha = a$ 为无理数时，z^α 为无穷多值函数.

习　题　1

1. 用公式(1.9)来验证：Newton-Leibniz 公式，Green 公式，Stokes 公式以及 Gauss 公式.

2. (1) 求下列复数的模及辐角的主值：

(i) $2i$； (ii) $1-i$； (iii) $3+4i$； (iv) $-5+12i$.

(2) 求下列复数的值：

(i) $(1+3i)^3$； (ii) $\dfrac{10}{4-3i}$；

(iii) $\dfrac{2-3i}{4+i}$； (iv) $(1+i)^n+(1-i)^n$ （n 为正整数）.

(3) 求下列复数的绝对值：

(i) $-3i(2-i)(3+2i)(1+i)$； (ii) $\dfrac{(4-3i)(2-i)}{(1+i)(1+3i)}$.

3. 通过计算$(5-i)^4(1+i)$，证明：

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

4. 若 $z=x+iy$，x，y 为实数，求下列复数的实部与虚部：

(i) $\dfrac{1}{z}$； (ii) z^2； (iii) $\dfrac{1+z}{1-z}$； (iv) $\dfrac{z}{z^2+1}$.

5. 解二次方程

$$z^2+(\alpha+i\beta)z+\gamma+i\delta=0,$$

这里，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数.

6. 设 $|z|=r>0$，证明：

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right),\quad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{r^2}{z}\right).$$

7. 求证：(1) 若 $|a|<1$，$|b|<1$，则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$.

(2) 若 $|a|=1$ 或 $|b|=1$，则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$，并讨论 $|a|=1$ 及 $|b|=1$ 同时成立的情形.

8. 证明复数形式的 Lagrange 等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2,$$

由此导出复数形式的 Cauchy 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2,$$

并证明上式等号成立当且仅当 a_k 与 $\bar{b}_k(k=1,\cdots,n)$ 成比例.

9. 证明：a_1,a_2,a_3 为等边三角形的顶点当且仅当

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

10. 证明:复数 α,β,γ 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} \alpha & \overline{\alpha} & 1 \\ \beta & \overline{\beta} & 1 \\ \gamma & \overline{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. 求 $1-\mathrm{i}, 4+3\mathrm{i}$ 在 Riemann 球面 S^2 上所对应的点.

12. 若 z_1, z_2 为复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的两点,对应于 Riemann 球面 S^2 上的两点为一条直径的两个端点,当且仅当 $z_1\overline{z_2} = -1$.

13. 证明圆周的方程为 $A|z|^2 + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$,其中,$A,C$ 为实数,且 $|B|^2 > AC$. 并证明上述圆周在 Riemann 球面 S^2 上对应的像是大圆当且仅当 $A+C=0$.

14. 设 $d(z_1,z_2)$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 中两点 z_1,z_2 对应于 Riemann 球面 S^2 上两点 Z_1,Z_2 之间的球面距离,证明:

$$d(z_1,z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \quad (z_1,z_2 \in \boldsymbol{C});$$

$$d(z_1,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \quad (z_1 \in \boldsymbol{C}).$$

15. 说明下列关系式的几何意义:

(i) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| \leqslant 1 \quad (z_1 \neq z_2)$;

(ii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0 \quad (z_1 \neq z_2)$;

(iii) $0 < \arg\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} < \dfrac{\pi}{4}$;

(iv) $|z+c| + |z-c| \leqslant 2a \quad (a>0, |c|<a)$.

16. 证明复平面上的 Heine-Borel 定理、Bolzano-Weierstrass 定理.

17. 证明:序列 $z_n \in \boldsymbol{C}\ (n=1,2,\cdots)$ 收敛到点 $z_0 \in \boldsymbol{C}$ 当且仅当序列 $\mathrm{Re}\,z_n, \mathrm{Im}\,z_n (n=1,2,\cdots)$ 分别收敛到 $\mathrm{Re}\,z_0, \mathrm{Im}\,z_0$.

18. 证明:(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n' = b$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k z_{n-k}' = ab.$$

(2) 由此导出:若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = A.$$

19. 讨论下列函数的可导性：

(ⅰ) $f(z)=|z|$；　(ⅱ) $f(z)=\overline{z}$；　(ⅲ) $f(z)=\operatorname{Re} z$.

20. 若 $g(w)$ 及 $f(z)$ 都是全纯函数，证明 $g(f(z))$ 也是全纯函数.

21. (1) 若函数 $f(z)$ 在域 D 内全纯，且 $f'(z)$ 在域 D 内恒等于零，则 $f(z)$ 在 D 内为常数.

(2) 若函数 $f(z)$ 在域 D 内全纯，且满足下列条件之一：

(ⅰ) $\operatorname{Re} f(z)$ 在 D 内是常数；

(ⅱ) $\operatorname{Im} f(z)$ 在 D 内是常数；

(ⅲ) $|f(z)|$ 在 D 内是常数；

(ⅳ) $\arg f(z)$ 在 D 内是常数，

则 $f(z)$ 在 D 内是常数.

22. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是全纯函数，且 $f'(z)\neq 0$，则曲线 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 正交，这里，c_1,c_2 是常数.

23. 证明：(1) 在极坐标下

$$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta),\quad z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

则 C-R 方程为

$$u_r=\frac{1}{r}v_\theta,\quad v_r=-\frac{1}{r}u_\theta,$$

且

$$f'(z)=\frac{r}{z}(u_r+\mathrm{i}v_r).$$

(2) 若记 $f(z)=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则 C-R 方程为

$$\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{R}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial R}{\partial\theta}=-Rr\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

24. 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ $(z=x+\mathrm{i}y)$ 在域 D 内全纯，证明 u，v 对 x,y 的 Jacobi 行列式为

$$J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=|f'(z)|^2,$$

并给出其几何意义.

25. 计算：

(ⅰ) $\int_\gamma x\mathrm{d}z$，这里，$z=x+\mathrm{i}y$，γ 为由 0 到 $1+\mathrm{i}$ 的有向线段；

(ⅱ) $\int_\gamma |z-1||\mathrm{d}z|$，这里，$\gamma(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(ⅲ) $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z$,这里,$\gamma(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,$a$ 为一个复常数).

26. (1) 求 $\cos(x+\mathrm{i}y)$,$\sin(x+\mathrm{i}y)$ 的实部与虚部,这里,x,y 为实数.

(2) 证明:

$$\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z,\quad \cos(\mathrm{i}z) = \cosh z,\quad (\sin z)' = \cos z,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

27. 求 $\sin\mathrm{i}$,$\cos(2+\mathrm{i})$,$\tan(1+\mathrm{i})$,2^{i},i^{i},$(-1)^{2\mathrm{i}}$,$\ln(2-3\mathrm{i})$,$\arccos\frac{1}{4}(3+\mathrm{i})$ 的值.

28. (1) 当 $z = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}, -\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}$ 时,求 e^z 的值.

(2) 若 $\mathrm{e}^z = \mathrm{i}$,求 z 的值.

29. 确定 z^z 的实部与虚部,这里,$z = x + \mathrm{i}y$.

30. 证明 $z^n = a$ 的根是正多边形的顶点.

31. 证明:

(ⅰ) Cauchy 判别准则;

(ⅱ) Weierstrass M- 判别法

在复数域上都是成立的.

32. 求出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径,若:

(ⅰ) $a_n = n^{1/n}$;　(ⅱ) $a_n = n^{\ln n}$;　(ⅲ) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;　(ⅳ) $a_n = n^n$.

33. 证明定理 4.

34. 若 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯,$f(0) = 1$. 证明:

(1) 若 $f'(z) = f(z)$ 对每个 $z \in \boldsymbol{C}$ 都成立,则 $f(z) = \mathrm{e}^z$.

(2) 若对每个 $z \in \boldsymbol{C}$ 及每个 $w \in \boldsymbol{C}$,有 $f(z+w) = f(z)f(w)$,且 $f'(0) = 1$,则 $f(z) = \mathrm{e}^z$.

35. 若 f 在 $\boldsymbol{C}\setminus(-\infty,0]$ 中全纯,$f(1) = 0$,这里,$\boldsymbol{C}\setminus(-\infty,0]$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 去掉线段 $(-\infty,0]$(下面还要用这种记号,不再说明). 证明:

(1) 若对每个 $z \in \boldsymbol{C}\setminus(-\infty,0]$,$f(z) = \mathrm{e}^{-f(z)}$ 成立,则 $f(z) = \ln z$.

(2) 若对每个 $z \in \boldsymbol{C}\setminus(-\infty,0]$ 及每个 $w \in (0,+\infty)$,$f(zw) = f(z) + f(w)$ 成立,且 $f'(1) = 1$,则 $f(z) = \ln z$.

36. 若 $\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$,则下面四个域都是 φ 的单叶性区域:

（ⅰ）上半平面$\{z\in \boldsymbol{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$；

（ⅱ）下半平面$\{z\in \boldsymbol{C}\mid \operatorname{Im} z<0\}$；

（ⅲ）无心单位圆盘 $D(0,1)\setminus\{0\}$，这里，$D(0,1)$ 表示以原点为中心，1 为半径的单位圆盘；

（ⅳ）单位圆盘的外部$\{z\in \boldsymbol{C}\mid |z|>1\}$.

37. 求上题中的四个区域在映射 $\varphi(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$下的像.

38. 证明下面三个域都是 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的单叶性域：

（ⅰ）条形域$\{z\in \boldsymbol{C}\mid \theta_0<\operatorname{Re} z<\theta_0+\pi\}$；

（ⅱ）半条形域$\{z\in \boldsymbol{C}\mid \theta_0<\operatorname{Re} z<\theta_0+2\pi,\operatorname{Im} z>0\}$；

（ⅲ）半条形域$\{z\in \boldsymbol{C}\mid \theta_0<\operatorname{Re} z<\theta_0+2\pi,\operatorname{Im} z<0\}$，这里，$\theta_0$ 为一个固定的实数.

39. 证明 $w=\cos z$ 将半条形域$\{z\in \boldsymbol{C}\mid 0<\operatorname{Re} z<2\pi,\operatorname{Im} z>0\}$ 单叶地映为 $\boldsymbol{C}\setminus[-1,+\infty)$.

40. 证明 $w=\sin z$ 将半条形域$\{z\in \boldsymbol{C}\mid -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im} z>0\}$ 单叶地映为上半平面.

41. 证明 $D(0,1)$ 是 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ 的单叶性区域，并求出 $f(D(0,1))$.

42. 当 z 按逆时针方向沿圆周$\{z\in \boldsymbol{C}\mid |z|=2\}$ 旋转一圈后，计算下列函数辐角的增量：

（ⅰ）$(z-1)^{1/2}$；（ⅱ）$(1+z^4)^{1/3}$；（ⅲ）$(z^2+2z-3)^{1/4}$；

（ⅳ）$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$；（ⅴ）$\left(\frac{z^2-1}{z^2+5}\right)^{1/7}$.

43. 若 $f(z)$ 为区域 U 上的单叶全纯映射，则 G 的面积为

$$\iint_U |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

44. 证明：若$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足条件：

（ⅰ）$\{S_n\}$ 有界，这里 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$；

（ⅱ）$\lim_{n\to\infty} b_n=0$；

（ⅲ）$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|<+\infty$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，并验证这是实数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的推广.

45. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是复数项级数，且 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$，则

(1) 若 $q < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $q > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

46. 若 $a_n \in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ $(n = 1,2,\cdots)$，且 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$，如果 $q<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 试讨论当 $q > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛与发散性质.

47. 若 $a_n \in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ $(n = 1,2,\cdots)$，且 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，证明：若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} n\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - 1\right) < -1$，则 $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛(Raabe 判别法).

48. 若 $a_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 为正的单调收敛于零的数列，则

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geqslant 1$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\partial D(O,R)\backslash\{R\}$ 上处处收敛，这里，$\partial D(O,R)$ 表示圆盘 $D(O,R)$ 的边界，即以 O 为中心，R 为半径的圆周.

49. 证明：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在其收敛圆盘 D 上一致收敛，当且仅当它在 $\overline{D}$ 上一致收敛，这里，$z_0 \in \boldsymbol{C}$ 为一个固定的点，$\overline{D}$ 表示 D 的闭包.

50. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ 的收敛半径为 1，$z_0 \in \partial D(0,1)$. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$，并且 $\lim_{r\to 1} f(r z_0)$ 存在，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ 收敛于 $\lim_{n\to\infty} f(r z_0)$.

第 2 章　Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式

2.1　Cauchy-Green 公式(Pompeiu 公式)

Cauchy 积分理论是复变数函数论中的三个主要组成部分之一. 有了 Cauchy 积分理论,复变数函数论才形成一门独立的学科,并由此导出一系列在微积分中得不到的结果.

先从 Cauchy-Green 公式开始,这是上一章中的定理 2(复形式的 Green 公式)的直接推论.

定理 1(Cauchy-Green 公式,Pompeiu 公式)　若 $U\subseteq \mathbf{C}$ 为有界域,有 C^1 边界,即边界为光滑曲线,$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\in C^1(\overline{U})$,即 $u(x,y),v(x,y)$ 在 $\overline{U}$ 上有一阶连续偏微商,则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_U\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_U\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\zeta-z}. \tag{1.1}$$

证明　在 z 点的附近作一个以 z 为中心,ε $(\varepsilon>0)$ 为半径的小圆 $D(z,\varepsilon)$,且 $D(z,\varepsilon)\subset U$. 记 $U_{z,\varepsilon}=U\backslash D(z,\varepsilon)$. 在 $U_{z,\varepsilon}$ 中考虑微分形式

$$\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z},$$

则由第 1 章定理 2(复形式的 Green 公式),得到

$$\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\int_{\partial D_{z,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right).$$

由 d_ζ 的定义,得

$$\iint_{U_{z,\varepsilon}} \mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \iint_{U_{z,\varepsilon}} (\partial + \bar{\partial})\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right)$$

$$= \iint_{U_{z,\varepsilon}} \partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) + \iint_{U_{z,\varepsilon}} \bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right).$$

由于

$$\partial\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\zeta = 0,$$

以及

$$\bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + f\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta,$$

而$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = 0$,故

$$\bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

因此

$$\iint_{U_{z,\varepsilon}} \mathrm{d}_\zeta\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \iint_{U_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

另一方面,由于

$$\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

而由假设,$f(\zeta) \in C^1(\bar{U})$,故存在常数 c,使得

$$|f(\zeta) - f(z)| < c|\zeta - z|$$

在 $\partial D(z,\varepsilon)$ 上成立,于是

$$\left|\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right| < c\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \left|\frac{\zeta - z}{\zeta - z}\right| |\mathrm{d}\bar{\zeta}| = 2\pi\varepsilon c.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,上述积分趋于零.而当 $\zeta \in \partial D(z,\varepsilon)$ 时,ζ 可表为 $\zeta = z + \varepsilon e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,于是

$$\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(z)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\theta} i\,\mathrm{d}\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = 2\pi i f(z).$$

因此

$$\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z) = \iint_{U_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + O(\varepsilon),$$

这里,$O(\varepsilon)$ 表示一个量,当此量除以 ε,而让$\varepsilon \to 0$ 时,其值趋于常数.在上式中令 $\varepsilon \to 0$,即得(1.1)式.证毕.

由定理 1,立得

定理 2(Cauchy 积分公式) 若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域,有 C^1 边界,$f(z)$ 为 U 上的全纯函数,且 $f(z) \in C^1(\bar{U})$,则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta. \tag{1.2}$$

由此还可以立即得到

定理 3(Cauchy 积分定理) 若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域,有 C^1 边界,$F(z)$ 为 U 上全纯函数,且 $F(z) \in C^1(\bar{U})$, 则

$$\int_{\partial U} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0. \tag{1.3}$$

证明 不妨假设 U 包含原点,令 $f(z) = zF(z)$,以此代入(1.2)式,再令 $z = 0$,即得(1.3)式. 证毕.

也就是说,Cauchy 积分公式可以推出 Cauchy 积分定理. 当然,定理3也可以由 Cauchy-Green 定理直接证明.

反过来,由 Cauchy 积分定理可以推出 Cauchy 积分公式. 可以这样来进行:在 U 中固定一点z_0,考虑 $U_{z_0,\varepsilon}$(定义如前). 取 $F(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$,如同证明定理1那样,立得定理2. 因此,定理2、定理3是相互等价的. 而这两条相互等价的定理却是复变函数论的重要基石之一.

Cauchy-Green 公式的另一个重要应用是解一维的 $\bar{\partial}$- 问题,这将在第 3 章中用到.

若 ψ 为一个连续函数,使 $\psi \neq 0$ 的所有的点的集合的闭包称为 ψ 的支集(support),记作 $\operatorname{supp}\psi$.

定理 4(一维的 $\bar{\partial}$- 问题的解) 若 $\psi(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$,且有紧致支集,即支集为紧致集,令

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{\boldsymbol{C}} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta, \tag{1.4}$$

则 $u(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$,且为$\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ 的解.

证明 固定 $z \in \boldsymbol{C}$,令 $\zeta - z = \xi$,则

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{\boldsymbol{C}} \frac{\psi(\xi + z)}{\xi}\mathrm{d}\bar{\xi} \wedge \mathrm{d}\xi.$$

由于$\dfrac{1}{\xi}$ 在任意紧致集合上可积,故 $u(z)$ 为连续函数. 若 $h \in \boldsymbol{R}, h \neq 0$,则

$$\frac{u(z+h)-u(z)}{h}=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\psi(\xi+z+h)-\psi(\xi+z)}{h}d\bar{\xi}\wedge d\xi.$$

固定 z,ξ，当 $h\to 0$ 时

$$\frac{\psi(\xi+z+h)-\psi(\xi+z)}{h}\to\frac{\partial\psi(\xi+z)}{\partial\xi}.$$

由于 $\psi\in C^{1}(\boldsymbol{C})$，且有紧致支集，故

$$\frac{\psi(\xi+z+h)-\psi(\xi+z)}{h}\to\frac{\partial\psi(\xi+z)}{\partial\xi}$$

对 ξ 及 z 来讲是一致的. 由于$\frac{1}{|\xi|}$ 在任意紧致集合上是可积的，故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(z+h)-u(z))\\&=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\xi+z)d\bar{\xi}\wedge d\xi\\&=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\alpha}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta,\end{aligned}\tag{1.5}$$

这里，$\zeta=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\boldsymbol{R})$. 而这个极限对 $\boldsymbol{C}$ 中任意紧致集合的点z 来讲是一致的. 故$\frac{\partial u}{\partial x}$ 是连续的. 同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(\xi+z)d\bar{\xi}\wedge d\xi\\&=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\beta}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\xi}\wedge d\xi,\end{aligned}\tag{1.6}$$

且$\frac{\partial u}{\partial y}$ 是连续的. 故 $u\in C^{1}(\boldsymbol{C})$.

由(1.5) 式及(1.6) 式立得

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{C}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.\tag{1.7}$$

由于 $\psi(z)$ 有紧致子集 $\operatorname{supp}\psi$，则存在 $R>0$，使得 $\operatorname{supp}\psi\subset D(0,R)=\{z\mid |z|<R\}$. 于是由(1.7) 式得到：取 $\varepsilon>0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{D(0,R+\varepsilon)}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta.$$

由 Cauchy-Green 公式(定理 1) 得到上式右边等于

$$\psi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R+\varepsilon)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(0,R+\varepsilon)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

显然为零,故得

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}}=\psi(z).$$

定理证毕.

显然,若 $\psi(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$ 有紧致支集,则由(1.4)式所定义的 $u(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$,这里 k 为正整数或 ∞.同样显然的是:若 $\psi(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$,其支集为互不相交的紧集之和(有限个或无限个),则定理 4 依然成立.

定理 4 还可以有以下的推论:

推论 1 若 $\psi(z)\in C^1(\boldsymbol{C})$,且 $\psi(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上绝对可积,即 $\iint\limits_{\boldsymbol{C}}|\psi(\zeta)|\mathrm{d}A<\infty$,则由(1.4)式定义的 $u(z)\in C^1(\boldsymbol{C})$,且为 $\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}}=\psi(z)$ 的解.

证明 先证由(1.4)式定义的 $u(z)$ 有意义.

给定 $z\in\boldsymbol{C}$,取以 z 为中心,$a\ (a>0)$ 为半径的圆 $D(z,a)$,于是

$$\iint\limits_{\boldsymbol{C}}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=\Big(\iint\limits_{D(z,a)}+\iint\limits_{\boldsymbol{C}\setminus D(z,a)}\Big)\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

先看

$$\iint\limits_{D(z,a)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

取极坐标

$$\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=2\mathrm{i}\,\mathrm{d}A=2\mathrm{i}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D(z,a)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta&=2\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\psi(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=2\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\int_0^a\psi(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于 $\psi\in C^1(\boldsymbol{C})$,故上述积分存在.

再看

$$\iint\limits_{\boldsymbol{C}\setminus D(z,a)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

由于当 $\zeta\in\boldsymbol{C}\setminus D(z,a)$ 时,$|\zeta-z|>a$,故

$$\left|\iint\limits_{C\setminus D(z,a)} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \iint\limits_{C\setminus D(z,a)} \left|\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta\right|$$
$$\leqslant \frac{2}{a} \iint\limits_{C\setminus D(z,a)} |\psi(z)|\,\mathrm{d}A$$
$$< \infty.$$

故由(1.4)式定义的 $u(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上有意义.

再证 $u(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$ 和$\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \psi(z)\ (z \in \boldsymbol{C})$.

设 $\psi_1(\zeta), \psi_2(\zeta), \cdots, \psi_n(\zeta), \cdots$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的常数值函数 1 的分解,即单位分解(参阅附录),对任意取的 $R > 0$,由单位分解的性质,存在自然数 N,只要 $n > N$, $\operatorname{supp} \psi_n$ 与 $\zeta = 0$ 点之间的距离大于 R,这样 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \psi_n(\zeta)$ 当 $\zeta \in D(0,R)$ 时恒等于零. 于是

$$\begin{aligned}
u(z) &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint\limits_{C} \frac{\psi(\zeta)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint\limits_{C} \frac{\psi(\zeta)\psi_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint\limits_{C} \frac{\psi(\zeta)\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

由于 $\psi(\zeta)\psi_n(\zeta)$ 有紧致支集,故由定理4,(1.8)式右边的第一项属于 $C^1(\boldsymbol{C})$. 而第二项就是

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint\limits_{C\setminus D(0,R)} \frac{\psi(\zeta)\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta,$$

当 $z \in D(0,R)$ 时,上述积分是 z 的全纯函数,故也属于 $C^1(\boldsymbol{C})$.

因此,当 $z \in D(0,R)$ 时,由(1.4)式所定义的 $u(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$.

对(1.8)式求导$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$,则由定理4,(1.8)式右边的第一项为$\sum\limits_{n=1}^{N}\psi(z)\psi_n(z)$,第二项当 $z \in D(0,R)$ 时为零. 故当 $z \in D(0,R)$ 时

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \sum_{n=1}^{N}\psi(z)\psi_n(z).$$

但当 $z \in D(0,R)$, $n > N$ 时, $\psi_n(z) = 0$,故当 $z \in D(0,R)$ 时

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(z)\psi_n(z) = \psi(z).$$

由于 $R > 0$ 是可以任意取的,故有 $u(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$ 和$\dfrac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ $(z \in \boldsymbol{C})$. 推论 1 得证.

2.2 Cauchy-Goursat 定理

Cauchy 当初建立的积分公式与积分定理就是定理 2 及定理 3 的形式. 之后 Goursat 去掉了 $f(z) \in C^1(\bar{U})$ 的条件,成为 Cauchy-Goursat 积分公式与积分定理,从而成为一般通常应用的公式与定理.

定理 2′(Cauchy-Goursat 积分公式) 若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域,∂U 为可求长简单闭曲线,若 $f(z)$ 在 U 上全纯,在 $\bar{U}$ 上连续,则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{2.1}$$

定理 3′(Cauchy-Goursat 积分定理) 若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域,∂U 为可求长简单闭曲线,若 $f(z)$ 在 U 上全纯,在 $\bar{U}$ 上连续,则有

$$\int_{\partial U} f(\zeta)d\zeta = 0. \tag{2.2}$$

显然定理 2′ 与定理 3′ 是相互等价的. 这里只证明定理 3′,用的是传统的方法.

引理 1 设 $f(z)$ 为在区域 $G \subseteq \boldsymbol{C}$ 上的连续函数,Γ 是在这区域内的任意一条逐段光滑曲线,则对任意小的 $\varepsilon > 0$,存在一条完全在 G 内的折线 P,使得

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{P} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

成立.

证明 在 G 内取一个闭子区域 $\bar{D} \subset G$,使得 $\Gamma \subset \bar{D}$. 由于 $f(z)$ 在 G 上连续,故在 $\bar{D}$ 上一致连续. 因此,对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$,使得对 $\bar{D}$ 内任意满足 $|z' - z''| < \delta$ 的两点,$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ 都成立. 分 Γ 为 n 段长度都小于 δ 的弧 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$,且连接小弧的端点,得线段 $l_0, l_1, \cdots, l_{n-1}$,这些小线段的全体组成折线 P,取 ε 足够小,使 P 全在 G 内,这是做得到的. 以 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 表示折线 P 的顶点,由于每一段 s_k 的长度都小于 δ,故每个弧段上任意两点的距离都小于 δ,对

l_k 上的任意两点也是如此. 积分$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ 有近似值

$$s = f(z_0)\Delta z_0 + f(z_1)\Delta z_1 + \cdots + f(z_{n-1})\Delta z_{n-1},$$

这里,$\Delta z_k = \int_{s_k} \mathrm{d}z$. 这也可表示为

$$s = \int_{s_0} f(z_0)\mathrm{d}z + \int_{s_1} f(z_1)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{s_{n-1}} f(z_{n-1})\mathrm{d}z.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s = &\int_{s_0}(f(z) - f(z_0))\mathrm{d}z + \int_{s_1}(f(z) - f(z_1))\mathrm{d}z \\ &+ \cdots + \int_{s_{n-1}}(f(z) - f(z_{n-1}))\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由于在每段 s_k 上都有 $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$,故有

$$\left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s\right| < \varepsilon s_0 + \varepsilon s_1 + \cdots + \varepsilon s_{n-1} = \varepsilon l,$$

这里,l 为 Γ 的长度.

由于 Δz_k 也可表为$\int_{l_k}\mathrm{d}z$,故同样有

$$\begin{aligned}\int_P f(z)\mathrm{d}z - s = &\int_{l_0}(f(z) - f(z_0))\mathrm{d}z + \int_{l_1}(f(z) - f(z_1))\mathrm{d}z \\ &+ \cdots + \int_{l_{n-1}}(f(z) - f(z_{n-1}))\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

同样得到

$$\begin{aligned}\left|\int_P f(z)\mathrm{d}z - s\right| &< \varepsilon l_0 + \varepsilon l_1 + \cdots + \varepsilon l_{n-1} \\ &= \varepsilon(l_0 + l_1 + \cdots + l_{n-1}) \\ &< \varepsilon l.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant \left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s\right| + \left|s - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| \\ &= \varepsilon l + \varepsilon l = 2\varepsilon l.\end{aligned}$$

这就证明了引理 1.

引理 2　若 $f(z)$ 是单连通区域 $G \subseteq \boldsymbol{C}$ 上的全纯函数,则沿 G 内任意一条逐段光滑闭曲线 Γ 所取的积分$\int_\Gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$.

证明　由引理 1,任给 $\varepsilon > 0$,对任意一条逐段光滑闭曲线 Γ,都有一条闭折线

P 使得

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z - \int_{P} f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$$

成立.

如果对任意闭折线,引理 2 成立,即$\int_{P} f(z)\mathrm{d}z = 0$,由此即可得出引理 2 对任意逐段光滑闭曲线也都成立.

对任意闭折线,均可添加直线段,使之分解成若干个三角形之和. 因为在添加的这些线段上积分的值相互抵消,于是在闭折线上的积分等于在这些三角形上的积分的总和. 如果能证明在三角形(图 2.1) 上引理 2 是成立的,则引理 2 对任意逐段光滑闭曲线都成立.

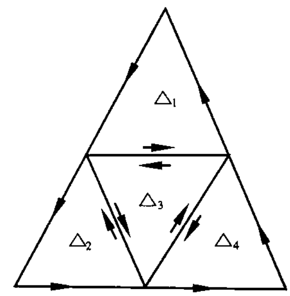


图 2.1

现在来证明引理 2 对三角形成立.

设在 G 内任一三角形周界 $\triangle$ 上,$f(z)$ 的积分的绝对值为 M,即

$$\left|\int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z\right| = M.$$

要证 $M = 0$. 二等分三角形的每一边,两两连接这些分点,给定的三角形被分成四个全等的三角形,它们的周界分别为 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ 及 $\triangle_4$. 于是

$$\int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z = \left(\int_{\triangle_1} + \int_{\triangle_2} + \int_{\triangle_3} + \int_{\triangle_4}\right) f(z)\mathrm{d}z.$$

由于$\left|\int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z\right| = M$,故至少有一个 $\triangle_k$ $(k = 1,2,3,4)$ 使得$\left|\int_{\triangle_k} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}$. 不妨设此为 $\triangle_1 = \triangle^{(1)}$,于是$\left|\int_{\triangle_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}$. 对 $\triangle_1$ 用同样方法分成四个全等三角形,又可找到一个三角形 $\triangle^{(2)}$,使得$\left|\int_{\triangle^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^2}$. 这样可以无限制地进行下去,于是得到一串三角形序列 $\triangle = \triangle^{(0)}, \triangle_1 = \triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \cdots, \triangle^{(n)}$, $\cdots$,前一个包含后一个,而

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^n} \quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{2.3}$$

以 L 表示 $\triangle$ 的周长,于是 $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \cdots, \triangle^{(n)}, \cdots$ 的长度为$\frac{L}{2}, \frac{L}{2^2}, \cdots, \frac{L}{2^n}, \cdots$. 当 $n \to \infty$ 时,$\frac{L}{2^n}$ 趋于零. 故存在一点 z_0,属于所有的 $\triangle^{(n)}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$. 对于任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$,只要 $|z - z_0| < \delta$,就有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

成立,即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|$$

成立.当 n 充分大时,$\triangle^{(n)}$ 全落在 $D(z_0,\varepsilon)$ 之中,显然 $\int_{\triangle^{(n)}}\mathrm{d}z=0$ 及 $\int_{\triangle^{(n)}}z\mathrm{d}z=0$,故

$$\int_{\triangle^{(n)}}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\triangle^{(n)}}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\mathrm{d}z.$$

于是

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}}f(z)\mathrm{d}z\right|<\int_{\triangle^{(n)}}\varepsilon|z-z_0||\mathrm{d}z|.$$

但 $|z-z_0|$ 为 $\triangle^{(n)}$ 上任意一点 z 到这三角形内一点 z_0 的距离,故

$$|z-z_0|<\frac{L}{2^n}.$$

因此

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}}f(z)\mathrm{d}z\right|<\varepsilon\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n}=\varepsilon\frac{L^2}{4^n}. \tag{2.4}$$

比较(2.3)式与(2.4)式,即得 $M<\varepsilon L^2$ 对任意 $\varepsilon>0$ 都成立,故 $M=0$.引理2得证.

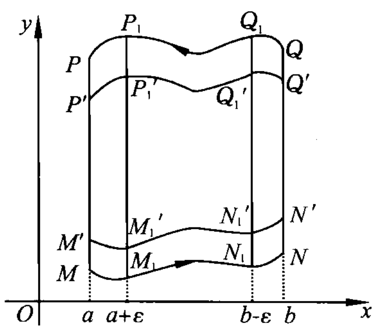


图 2.2

定理3′的证明 先设 U 具有特殊形状,来证定理3′成立.

若 U 为由 $x=a,x=b$ $(a<b)$ 及两条可求长连续曲线

$$MN:\ y=\varphi(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$
$$PQ:\ y=\psi(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

所围成的区域(见图2.2),其中 $\varphi(x)<\psi(x)$ $(a<x<b)$.假定 $f(z)$ 在 U 上全纯,在 $\bar{U}$ 上连续,要证

$$\int_{MNQPM}f(z)\mathrm{d}z=0. \tag{2.5}$$

作直线 $x=a+\varepsilon,x=b-\varepsilon$,及

$$M'N':\ y=\varphi(x)+\eta\quad(a\leqslant x\leqslant b);$$
$$P'Q':\ y=\psi(x)-\eta\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中,ε,η 为充分小的正数.由于 U 为单连通区域,故

$$\int_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

其中，$M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'$ 为由上述两条直线及两条曲线所围成的域的边界.

固定 ε，令 $\eta \to 0$，由于 $f(z)$ 在 $\bar{U}$ 上一致连续，故有

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{M_1N_1} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{Q_1'P_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{Q_1P_1} f(z)\mathrm{d}z,$$

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{N_1'Q_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

因此

$$\int_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$，同理

$$\int_{M_1N_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{MN} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{Q_1P_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{QP} f(z)\mathrm{d}z.$$

如能证明当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\int_{P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{PM} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z,$$

则(2.5)式得证.这里只证后一个极限，前一个极限的证明可类似地进行.

令

$$y_\varepsilon = \max(\varphi(b), \varphi(b-\varepsilon)), \quad Y_\varepsilon = \max(\psi(b), \psi(b-\varepsilon)),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{i}\Big(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\Big) f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{i}\Big(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\Big) f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z - \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} [f(b+\mathrm{i}y) - f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)]\mathrm{d}y + \mathrm{i}S(\varepsilon), \quad (2.6)$$

这里

$$S(\varepsilon) = \Big(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\Big) f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y - \Big(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\Big) f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y.$$

由于 $f(z)$ 的一致连续性，当 $\varepsilon \to 0$ 时，(2.6)式右边的第一项趋于零.而当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$y_\varepsilon, Y_\varepsilon$ 分别以 $\varphi(b), \psi(b)$为极限，故 $S(\varepsilon)$ 中的四个积分均为零. 于是当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\int_{N_1 Q_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z.$$

这就证明了：当 U 为这种特殊区域时，定理 3′ 成立. 但对任意区域 U，均可用有限条平行于 y 轴的辅助线，将 U 划分成具有上述形状的域，而在辅助线上，积分相互抵消. 故定理 3′ 得证.

定理 3′ 对多连通区域也是成立的. 因为这可以将多连通区域用若干曲线分割成若干个单连通区域之和，而在辅助线上的积分都是相互抵消的.

这也可叙述为：若 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 为$n+1$条可求长的曲线，而 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 全在γ_0之内，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 中每一条曲线都在其他各条曲线的外部，U 为由 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 所围成的域，即 U 的边界∂U 由 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 所组成. 若 $f(z)$ 在 U 上全纯，在 $\bar{U}$ 上连续，则

$$\int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由定理 3′，如 $f(z)$ 在 U 上全纯，z_0, z 为 U 内两点，于是可以定义 $f(z)$ 的积分为

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

这个积分不依赖于路径的选取. 显然，$F'(z) = f(z)$ 成立.

2.3 Taylor 级数与 Liouville 定理

由 Cauchy 积分公式和 Cauchy 积分定理，立即可以得到一系列重要的推论，这一节以及以下各节都是它们的重要推论.

定理 5 若 $f(z)$ 在 $U \subseteq \mathbf{C}$ 上全纯，在 $\bar{U}$ 上连续，则 $f(z)$ 在 U 上的每一点，各级导数都存在，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3.1}$$

若 $z_0 \in U$，$\bar{D}(z_0, r) = \overline{\{z \mid |z - z_0| < r\}} \subset U$，则 $f(z)$ 在 $D(z_0, r)$ 中可展开成 Taylor 级数：

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j. \tag{3.2}$$

该级数在 $\overline{D}(z_0, r)$ 中绝对和一致收敛，且有

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta. \tag{3.3}$$

证明 设 $z_0 \in U$，作小圆 $D(z_0, r) \subset U$. 由定理 2′，若 $z \in D(z_0, r)$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

于是

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta, \end{aligned}$$

即

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

若 z_0 到 ∂U 的距离（即最短距离）为 d，取 $r = d/2$，于是

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &= |(\zeta - z_0) - (z - z_0)| \\ &\geqslant |\zeta - z_0| - |z - z_0| \\ &\geqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

但是 $|\zeta - z_0| \geqslant d$，故

$$\left|\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta\right| \leqslant \frac{M \cdot L}{\frac{d}{2} \cdot d^2} = \frac{2ML}{d^3},$$

这里，$M = \max\limits_{\zeta \in \partial U} |f(\zeta)|$，$L$ 为 ∂U 的长度. 在(3.4)式中令 $z \to z_0$，由上述估计式，即得

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$

这就证明了(3.1)式当 $n=1$ 时成立.

若(3.1)式当 $n=k\geqslant 1$ 时成立,即

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$$

成立.由于

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}},$$

而 $|z-z_0|<r\leqslant|\zeta-z_0|$,故 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$.于是

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j. \tag{3.5}$$

从而得到

$$\begin{aligned}f^{(k)}(z)&=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\cdots\right)^{k+1}d\zeta\\&=f^{(k)}(z_0)+\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)(z-z_0)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta+O(|z-z_0|^2).\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z_0)}{z-z_0}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta+O(|z-z_0|).$$

令 $z\to z_0$,即得(3.1)式当 $n=k+1$ 时也成立,即

$$f^{(k+1)}(z_0)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta.$$

由数学归纳法,(3.1)式对任意的 $n=1,2,\cdots$ 都成立.

将(3.5)式代入 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$,由第1章定理4,已知积分与 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}$ 是可交换的,故由(3.1)式即得

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{j=0}^{\infty}(z-z_0)^j\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{j+1}}d\zeta\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j.\end{aligned}$$

这就证明了(3.2)式及(3.3)式.

定理5表明:对于复变数函数来讲,如果一个函数的一阶导数存在,则任意阶导数都存在,而且可以展成Taylor级数.这个性质,对实变数函数来讲是没有的.这显示了复变数函数与实变数函数的根本区别之一.在第1章1.3节中,定义一个复

变数函数 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上是全纯的，若 $f(z)$ 在 U 上每一点其导数是存在的. 由定理 5 知道，这也可以定义为：$f(z)$ 在 U 上每一点 z 全纯，如果在这点的一个邻域中，$f(z)$ 可以展开成为收敛幂级数. 显然，这两种定义是等价的.

由定理 5，立即得到

定理 6 (1) Cauchy 不等式. 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯，$\overline{D}(z_0,R)\subseteq U$，则

$$|f^{(j)}(z_0)|\leqslant \frac{j!M}{R^j}\quad (j=1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

成立，这里，$M=\max\limits_{z\in\overline{D}(z_0,R)}|f(z)|$.

(2) 若域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$，$K$ 为 U 中的一个紧集，V 为 K 的一个邻域且在 U 中是相对紧的（即 $\overline{V}$ 是 U 的一个紧子集），则对每一个在 U 中全纯的函数 $f(z)$，存在常数 c_n $(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\sup_{z\in K}|f^{(n)}(z)|\leqslant c_n\|f\|_{L(V)}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{3.7}$$

成立，这里，$\|f\|_{L(V)}$ 为 f 在 V 上的 L 模，即

$$\frac{1}{A(V)}\iint_V |f(\zeta)|\,\mathrm{d}A,$$

$A(V)$ 为 V 的面积.

Cauchy 不等式给出全纯函数的各阶导数的模在一点的估计，而定理 6 中(2)的(3.7) 式给出全纯函数的各阶导数的模在一个紧致集合上的估计.

定理 6 的证明 定理 6 中(1) 的证明是显然的. 现在来证明定理 6(2).

在 V 上作一个 C^∞ 函数 ψ，具有如下的性质：在 V 上有紧致支集，且在 K 的邻域（包在 V 中）上取值为 1. 这样的 ψ 是存在的（见本章附录）. 对 ψf 应用定理 1（Pompeiu 公式），则有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{\psi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_U\frac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

由于在 U 上 f 为全纯，故 $\dfrac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}=f\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$. 但是 $\psi(\zeta)$ 的支集在 V 中，而 V 在 U 中相对紧，故有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_U f\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

若 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$ 的支集为 K_1，则 K_1 为 V 中的紧子集，故 K 与 K_1 之间的距离 $d(K,K_1)>0$.

若 $z\in K$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

在上式中,对 z 求 n 次导数,得到

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

于是就有

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\iint_{K_1}|f(\zeta)|\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right|\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{|\zeta-z|^{n+1}}.$$

由于 $d(K,K_1)>0$,故有 c_1 使得 $\frac{1}{|\zeta-z|}<c_1$,对于任意 $z\in K,\zeta\in K_1$ 都成立.

而 $\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right|$ 显然在 K_1 上有界,故有 c_n',使得

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z)|&\leqslant c_n'\iint_{K_1}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}|\\&\leqslant c_n'\iint_{V}|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}|\\&=c_n\|f\|_{L_{(V)}},\end{aligned}$$

这里,c_n',c_n 为只依赖于 n 的常数,这就是(3.7)式.

由定理6(2),立得

推论1 若 $U\subseteq\boldsymbol{C}$,K 为 U 中的一个紧集,$V\subset U$ 为 K 的一个邻域,且在 U 中是相对紧的,则对每一个在 U 中的全纯函数 $f(z)$,存在不依赖于 z 的常数 c_n $(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\sup_{z\in K}|f^{(n)}(z)|\leqslant c_n\sup_{z\in V}|f(z)|\quad(n=1,2,\cdots)$$

成立.

这个推论也可由定理5直接推出.但定理6(2)却不能被定理5推出,故定理6(2)是一条更为深刻的定理.

由定理5,立即得到定理3′(Cauchy-Goursat积分定理)之逆.

定理7(Morera定理) 若 $f(z)$ 在 U 上连续,且沿 U 中任意一条可求长闭曲线的积分为零,则 $f(z)$ 在 U 上全纯.

证明 任取一点 $z_0\in U$,由于在 U 中任一可求长闭曲线的积分为零,故

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\quad(z\in U)$$

不依赖于路径的选取,且 $F'(z)=f(z)$.于是 $F(z)$ 为 U 上的全纯函数.由定理5,

$F(z)$ 的二阶导数，即 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 也是存在的．故 $f(z)$ 在 U 上是全纯函数．证毕．

由定理 6，还可以立即得到重要的

定理 8（Liouville 定理） 若 $f(z)$ 在全平面 $\boldsymbol{C}$ 上全纯且有界，则 f 为常数．

证明 设 $|f(z)| \leqslant M\ (z \in \boldsymbol{C})$．固定 $z_0 \in \boldsymbol{C}$，作 $D(z_0, R)$，由(3.6)式（当 $j = 1$ 时），得到 $|f'(z_0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$．令 $R \to \infty$，得到 $f'(z_0) = 0$．由于 z_0 为 $\boldsymbol{C}$ 中任意一点，故 $f'(z) = 0$ 对任意 $z \in \boldsymbol{C}$ 都成立，因此 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上为常数．

Liouville 定理表明：在整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上全纯且有界的函数，只有常数．这个定理在第 5 章中还要进一步讨论．

最后来证明

定理 9（Riemann 定理） 若 F 在去掉一点 z_0 的圆 $\widetilde{D}(z_0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ 内全纯，且 F 在 $\widetilde{D}(z_0, r)$ 上有界，则 F 可解析开拓到 $D(z_0, r)$ 之上，即有在 $D(z_0, r)$ 上定义的全纯函数 f，使得

$$f\big|_{\widetilde{D}(z_0, r)} = F.$$

证明 不妨假设 $z_0 = 0$，定义

$$G(z) = \begin{cases} z^2 F(z), & \text{当 } z \in \widetilde{D}(0, r), \\ 0, & \text{当 } z = 0, \end{cases}$$

则 $G(z)$ 在 $D(0, r)$ 上连续可导，且满足 Cauchy-Riemann 方程，这是因为

$$\lim_{z \to 0} \frac{G(z) - 0}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 F(z) - 0}{z} = \lim_{z \to 0} z F(z) = 0.$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}G(0)}{\mathrm{d}z} = 0$．而当 $z \neq 0$ 时

$$G'(z) = z^2 F'(z) + 2zF(z).$$

显然 $G'(z) \to 0\ (z \to 0)$．由第 1 章 1.3 节的定理 1，$G(z)$ 是在 $D(0, r)$ 上的全纯函数．故 $G(z)$ 可以在 $z = 0$ 处展开成 Taylor 级数

$$G(z) = 0 + 0 \cdot z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \tag{3.8}$$

此级数在 $D(0, r)$ 中收敛，定义

$$f(z) = \frac{G(z)}{z^2} = a_2 + a_3 z + \cdots, \tag{3.9}$$

显然，级数(3.9)与级数(3.8)有相同的收敛半径，这可由第 1 章定理 3 中的(6.2)式得到．故 $f(z)$ 在 $D(0, r)$ 上全纯，且在 $\widetilde{D}(0, r)$ 中 $f(z) = F(z)$．

2.4 有关零点的一些结果

若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯，如果 $z_0\in U$ 且 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点. 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点有展开

$$a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\quad(a_m\neq 0),$$

则称 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处有 m 重零点. 由 Cauchy 积分公式及 Cauchy 积分定理可以得到一系列有关零点的推论.

定理 10(代数基本定理) 若 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 为 n 次多项式，则至少有一个 z_0，使 $p(z_0)=0$.

z_0 称为方程式 $p(z)=0$ 的根.

证明 如不然，则 $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯，由于当 $z\to\infty$ 时 $p(z)\to\infty$，所以 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上有界. 由定理8(Liouville定理)知，$f(z)$ 为常数，即 $p(z)$ 为常数. 得到矛盾.

定理 11 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq\boldsymbol{C}$ 上全纯，则 $f(z)$ 的零点的集合 $\{z\in U\mid f(z)=0\}$ 在 U 上无聚点，除非 $f(z)$ 在 U 上恒等于零.

证明 如不然，若 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 为 $f(z)$ 在 U 上的零点，且有聚点 $z_0\in U$. 不妨假设 $z_0=0$. 由于 $0\in U$，$f(z)$ 在 U 上全纯，故在 0 点 $f(z)$ 可以展成 Taylor 级数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots.$$

由于数列 $\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的零点，故 $f(z_n)=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(\lim_{n\to\infty}z_n)=f(0)=0.$$

故得 $a_0=0$. 因此

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

这就有 $a_1=\dfrac{f(z)}{z}+O(z)$. 取 $z=z_n$，得到 $a_1=\dfrac{f(z_n)}{z_n}+O(z_n)=O(z_n)$. 令 $n\to\infty$，即得 $a_1=0$. 用同样办法可得 $a_2=a_3=\cdots=a_n=\cdots=0$. 即 Taylor 级数的所有系数均为零，故 $f(z)=0$. 因此，若 $f(z)$ 不是在 U 上恒等于零的函数，则集合 $\{z\in U\mid f(z)=0\}$ 在 U 上无聚点.

由定理11,立即得到:若 $h_1(z)$,$h_2(z)$ 为域 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上的两个全纯函数,E 为 U 中一个有聚点的集合,其聚点在 U 中,如在 E 上 $h_1(z)=h_2(z)$,则在 U 上也有 $h_1(z)=h_2(z)$.即全纯函数在 U 上的值,可以由聚点在 U 内的点集上的值所完全决定.例如,$\sin^2 z+\cos^2 z=1$,当 z 为实数时成立,故为复数时也成立.同样道理,一些三角恒等式取实数值时成立,即可导出在复数时也成立.

定理 12(辐角原理) 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上全纯,$\gamma\subset U$ 为一条正定向简单闭曲线,且在 U 中可连续地缩成一个点,$f(z)$ 在 γ 上不为零,则 $f(z)$ 在 γ 内有有限个零点,零点的个数 k(重新计算在内)为

$$k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{4.1}$$

若记 $w=f(z)$,$z=z(t)$ $(t\in[a,b])$ 是 γ 的与定向相符的参数表示,$w(t)=f(z(t))$,则有

$$k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} w.$$

这里,Γ 为 γ 在 $w=f(z)$ 映射下的像,$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\int_a^b \frac{dw(t)}{w(t)}$,$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} w$ 表示当 z 在 γ 上正向绕行一周时 w 在 Γ 上的辐角变化.这说明当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时,$w=f(z)$ 在 Γ 上沿正方向绕原点转动的总圈数,恰好等于 f 在 γ 内的零点的个数.所以,这个定理也叫做辐角原理.

定理 12 的证明 设 $f(z)$ 在 γ 内有零点 $z_1,\cdots,z_n$,且其重数为 $k_1,\cdots,k_n$.在每个零点 $z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 处,以 z_i 为中心,以 $\varepsilon_i>0$ 为半径,作圆 γ_i,使得 γ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 都在 γ 内,且互不相交.于是由 Cauchy 积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

由于 $f(z)$ 在 $z=z_i$ 处为 k_i 重零点,于是在 γ_i 之内,$f(z)$ 可以写成

$$f(z)=(z-z_i)^{k_i}h_i(z),$$

这里,当 z 在 γ_i 之内时,$h_i(z)\neq 0$.于是

$$f'(z)=k_i(z-z_i)^{k_i-1}h_i(z)+(z-z_i)^{k_i}h_i'(z).$$

因此

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k_i}{z-z_i}+\frac{h_i'(z)}{h_i(z)}.$$

这就得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)}dz=k_i,$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n}k_i = k.$$

定理 13(Hurwitz 定理)　若$\{f_j\}$为$U\subseteq \boldsymbol{C}$上的全纯函数序列，在$U$内紧致集合上一致收敛(即内闭一致收敛)到一个函数$f$，若所有的$f_j$在$U$上全不等于零，则$f$或者恒不等于零或者恒等于零.

证明　对于任一点$z\in U$，在U中取一条简单闭曲线γ，且z在γ包含的区域内. 由于f_j在U上全纯，故由 Cauchy 积分公式得

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

由于$\{f_j\}$在U上内闭一致收敛，故

$$\lim_{j\to\infty}f_j(z) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\lim_{j\to\infty}f_j(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}d\zeta.$$

(由内闭一致收敛的条件可以导出极限与积分可以交换的结论. 其证明与微积分中相应定理的证明相仿，读者试自证明之. 也可从第 1 章定理 4 直接得出.) 此即为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

因此，$f(z)$为全纯函数. 同样可证$f_j'(z)$内闭一致收敛于$f'(z)$.

若$f(z)\not\equiv 0$，则由定理 11，$f(z)$的零点是离散的. 取γ不经过这些零点，于是当$j\to\infty$时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

但由假设及定理 12，知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}d\zeta = 0.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = 0,$$

即$f(z)$在U上无零点.

定理 14(Rouché 定理)　若$f(z), g(z)$在$U\subseteq \boldsymbol{C}$上全纯，$\gamma$为$U$内可求长简单闭曲线，且在$\gamma$上满足

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \tag{4.2}$$

则f, g在γ内有相同的零点个数.

证明　由(4.2)式知，在γ上$|f(z)| > 0$，且$g(z)\neq 0$. 如不然，在γ上存在

一点 z_0,使 $g(z_0)=0$,即得 $|f(z_0)|<|f(z_0)|$,这不可能.

令 N_1,N_2 分别为 f,g 在 γ 内零点的个数,则由定理 12(辐角原理),得到

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz,\quad N_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

于是得到

$$\begin{aligned}N_2-N_1&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{fg'-gf'}{fg}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\left(\frac{g}{f}\right)'}{\frac{g}{f}}dz.\end{aligned}$$

命

$$F(z)=\frac{g(z)}{f(z)},$$

则

$$N_2-N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{F'(z)}{F(z)}dz.$$

但是(4.2)式即为 $|F(z)-1|<1$. $w=F(z)$ 将 γ 映为 Γ,Γ 不经过原点且不包有原点,这是因为 Γ 在 $|w-1|<1$ 之内. 由定理 3(Cauchy 积分定理),得到 $\int_\Gamma\frac{dw}{w}=0$,即 $N_1=N_2$. 证毕.

定理 10 已经证明:若 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 为 n 次多项式,则至少有一个根,即有零点 z_0,$p(z_0)=0$.

现在用 Rouché 定理,立即可以证明:若 $a_n\neq 0$,则 $p(z)$ 有且只有 n 个零点,即 $p(z)=0$ 有且只有 n 个根. 这可证明如下:

令 $g(z)=a_nz^n$,则当 $|z|=R$ 充分大时

$$\begin{aligned}|p(z)-g(z)|&=|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\\&<|g(z)|=|a_n||z|^n\\&=|a_n|R^n\end{aligned}$$

成立. 故由 Rouché 定理,在 $|z|<R$ 内,$p(z)$ 与 $g(z)$ 有相同的零点个数,而 a_nz^n 显然有 n 个零点,故 $p(z)$ 也是如此.

作为 Rouché 定理的推论,有

定理 15 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上全纯,$w_0=f(z_0)$ ($z_0\in U$). 若 z_0 是 $f(z)-$

w_0 的 m 重零点，则对于充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $D(w_0,\delta)$ 内的每一点 A，函数 $f(z)-A$ 在 $D(z_0,\rho)$ 内恰有 m 个零点.

证明　z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零点，由定理 11，存在 $\rho>0$，使得 $f(z)-f(z_0)$ 在 $\bar{D}(z_0,\rho)\subset U$ 上，除去 z_0 外，没有其他的零点，而在 $|z-z_0|=\rho$ 上，$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta$ $(\delta>0)$. 于是在 $D(w_0,\delta)$ 内的任意点 A，当 $|z-z_0|=\rho$ 时，$|A-w_0|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立. 此即 $|(f(z)-f(z_0))-(f(z)-A)|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立. 由 Rouché 定理，$f(z)-A$ 与 $f(z)-f(z_0)$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上有相同的零点个数，而 $f(z)-f(z_0)$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上有 m 重零点，故 $f(z)-A$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上也有 m 个零点. 证毕.

有关零点的理论，以后还要讨论.

2.5　最大模原理、Schwarz 引理与全纯自同构群

Cauchy 积分公式的另一重要推论是最大模原理. 这是一条十分有用的定理.

在叙述这条定理之前，先来证明全纯函数的均值性质.

若 $f(z)$ 在 $U\subseteq\mathbf{C}$ 上全纯，$z_0\in U$. 若 $r>0$，使得 $\bar{D}(z_0,r)\subset U$，则由 Cauchy 积分公式得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

成立. $\partial D(z_0,r)$ 上的点 ζ 可以表示为 $\zeta=z_0+re^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. 于是 Cauchy 积分公式成为

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})ire^{it}}{re^{it}}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt,\end{aligned}\tag{5.1}$$

这就是全纯函数的均值性质. 这说明：$f(z)$ 在 $z=z_0$ 点的值等于 $f(z)$ 在 $\partial D(z_0,r)$ 上的值的平均.

在(5.1)式的两边取实部与虚部，于是得到：调和函数也有均值性质. 反过来，可以证明：具有均值性质的连续函数一定是调和函数，这将在 2.6 节中证明. 由于函数具有均值性质当且仅当函数是调和函数，所以调和函数也可定义为具有均值

性质的函数.

现在利用全纯函数的均值性质来证明

定理 16(最大模原理) 若 $f(z)$ 在域 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,如有点 $z_0 \in U$,使得 $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ 对所有的 $z \in U$ 都成立,则 $f(z)$ 必为常数.

证明 乘以模为 1 的常数,使得 $M = f(z_0) \geqslant 0$.令 $S = \{z \in U \mid f(z) = f(z_0)\}$,则 $S \neq \varnothing$ ($\varnothing$ 表示空集).这是因为已知有 $z_0 \in S$.由于 f 为 U 上的连续函数,故 S 为闭集.现在来证 S 也是开集.若 $w \in S$,取 r,使得 $D(w,r) \subseteq U$.取 r',而 $0 < r' < r$.于是由均值性质得

$$M = f(w) = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w + r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w + r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \mathrm{d}t \leqslant M.$$

由于上式左、右两端相等,故所有不等式中的等号成立,即

$$f(w + r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = |f(w + r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| = M$$

对所有的 t 及 $0 < r' < r$ 都成立.于是

$$\{w + r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mid 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, 0 < r' < r\} \subseteq S.$$

也就是说:对 S 中任意一点 w,一定存在一个开的小圆,这个小圆中的任意一点都属于 S.因此,S 是开集.因此,S 是 U 中的非空、既开又闭的集合.由于 U 是连通的,故 S 只能是 U,即 $S = U$.因此,$f(z)$ 在 U 上为常数 M.证毕.

这里用到了:一个连通集的非空子集,如果既开又闭,则这个子集一定是集合自己.这个结果很有用处,读者试自证明之.

作为最大模原理的**直接推论**有:若 $f(z)$ 在有界域 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,在 $\bar{U}$ 上连续,并且不是常数,则 $|f(z)|$ 只能在 ∂U 上达到最大值.

在最大模原理的证明中,只用到了函数的均值性质,故最大模原理对调和函数也是成立的.

由最大模原理立即推出重要的

定理 17(Schwarz 引理) 若 $f(z)$ 为将单位圆 $D = D(0,1)$ 映入到 D 的全纯函数,且 $f(0) = 0$,则

$$|f(z)| \leqslant |z| \quad 及 \quad |f'(0)| \leqslant 1 \tag{5.2}$$

成立.而 $|f(z)| = |z|$ 在 D 中一点 $z \neq 0$ 处成立,或 $|f'(0)| = 1$ 成立,当且仅当 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}z$,这里,$\tau \in \boldsymbol{R}$.

证明 令

$$G(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & 当\ z\neq 0,\\ f'(0), & 当\ z=0,\end{cases}$$

则 $G(z)$ 在 D 上全纯.对函数 $G(z)$ 在$\{z \mid |z|\leqslant 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 上应用最大模原理,得到

$$|G(z)|\leqslant\frac{\max\limits_{|z|=1-\varepsilon}|f(z)|}{1-\varepsilon}<\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$,即得 $|G(z)|\leqslant 1$ 在 D 上成立.故当 $z\neq 0$ 时, $|f(z)|\leqslant|z|$ 成立;而当 $z=0$ 时, $|G(0)|=|f'(0)|\leqslant 1$.

若$|f(z)|=|z|$在D中一点$z\neq 0$处成立,即$|G(z)|=1$在D中一点$z\neq 0$处成立,由最大模原理, $|G(z)|=1$ 对所有 $z\in D$ 都成立.故 $G(z)=e^{i\tau}(\tau\in\boldsymbol{R})$,即 $f(z)=e^{i\tau}z$.同样可证 $|f'(0)|=1$ 成立时,$f(z)=e^{i\tau}z$.证毕.

由 Schwarz 引理立即可以得到单位圆 D 的全纯自同构群.

若域 $U\subseteq\boldsymbol{C}$,在域 U 上的全纯自同构群是这样定义的:

全纯函数 $f(z)$ 在 U 上定义,若 $f(z)$ 将 U 单叶全纯地映射到自身,则称 $f(z)$ 为 U 的全纯自同构. U 上所有全纯自同构组成群,称这个群为域 U 的全纯自同构群.记作 $\mathrm{Aut}(U)$.

现在来给出 $\mathrm{Aut}(D)$.

先来证明:若 $a\in D$,则 $\varphi_a(\zeta)=\dfrac{-\zeta+a}{1-\bar{a}\zeta}\in\mathrm{Aut}(D)$.

显然 φ_a 在 $\bar{D}$ 上全纯,$\varphi_a(a)=0$,且 $\varphi_a:\partial D\to\partial D$.这是因为对于 $|\zeta|=1$,有

$$|\varphi_a(\zeta)|=\left|\frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{\zeta-a}{\bar{\zeta}-\bar{a}}\right|=1,$$

所以 $\varphi_a(\zeta)$ 将 D 的内部映为D 的内部.

再来证明 $\varphi_a(\zeta)$ 在 D 上是单叶的.

若有 $\zeta_1,\zeta_2\in D$,且

$$\frac{-\zeta_1+a}{1-\bar{a}\zeta_1}=\frac{-\zeta_2+a}{1-\bar{a}\zeta_2},$$

则

$$(\zeta_1-a)(1-\bar{a}\zeta_2)=(\zeta_2-a)(1-\bar{a}\zeta_1),$$

此即$(\zeta_1-\zeta_2)(1-|a|^2)=0$.由于 $|a|<1$,故 $\zeta_1=\zeta_2$.这就证明了 $\varphi_a\in\mathrm{Aut}(D)$.

令 $\xi=\varphi_a(\zeta)=\dfrac{-\zeta+a}{1-\bar{a}\zeta}$,于是 $\xi-\bar{a}\zeta\xi=-\zeta+a$,即

$$\zeta = \frac{-\xi + a}{1 - \bar{a}\xi} = \varphi_a(\xi).$$

故有$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_a$. 显然这也属于Aut($D$). 称$\varphi_a$为Möbius变换,所有Möbius变换组成的群,称为Möbius变换子群. 这是Aut(D)的一个子群.(实际上,Möbius变换子群是Möbius变换群Aut(C^*)的一个子群,Aut(C^*)是扩充复平面C^*的全纯自同构群,见第3章3.3节.

另外,旋转$\xi = \rho_\tau(\zeta) = e^{i\tau}\zeta$ ($\tau \in R$)显然也属于Aut(D),而所有旋转的全体组成的群称为旋转群,这也是Aut(D)的一个子群.

定理18(单位圆的全纯自同构群) 若$f \in$ Aut(D),则存在复数a ($|a|<1$)及$\tau \in R$,使得

$$f(\zeta) = \varphi_a \circ \rho_\tau(\zeta). \tag{5.3}$$

也就是说:Aut(D)中的元素都是由Möbius变换与旋转复合而成的.

证明 若$f(0) = b$. 令$G = \varphi_b \circ f$,则G在D上全纯单叶,将D映到D上,且

$$G(0) = \varphi_b \circ f(0) = \varphi_b(b) = 0.$$

由定理17(Schwarz引理),$|G'(0)| \leqslant 1$. 由于G在D上全纯单叶,且将D映到D上,故G^{-1}在D上存在,在D上全纯单叶,且$G^{-1}(0) = 0$. 同样可应用定理17于G^{-1},得

$$\left|\frac{1}{G'(0)}\right| = |(G^{-1})'(0)| \leqslant 1,$$

于是$|G'(0)| = 1$. 由定理17可知,这就导出$G(\zeta) = e^{i\tau}\zeta = \rho_\tau(\zeta)$,即$\varphi_b \circ f = \rho_\tau$,所以$f = \varphi_{-b} \circ \rho_\tau$. 取$-b = a$,即得(5.3)式.

由定理18可以导出重要的

定理19(Schwarz-Pick引理) 若f为将D映入D内的全纯函数,且将$z_1, z_2 \in D$映为$w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$,则

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\overline{w_2}}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right| \tag{5.4}$$

及

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1 - |w|^2} \leqslant \frac{|\mathrm{d}z|}{1 - |z|^2} \tag{5.5}$$

成立,等号成立当且仅当$f \in$ Aut(D).

证明 令

$$\varphi(z) = \frac{z + z_1}{1 + \overline{z_1}z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_1}{1 - \overline{w_1}z},$$

显然$\varphi, \psi \in$ Aut(D),且

$$\psi\circ f\circ\varphi(0)=\psi\circ f(z_1)=\psi(w_1)=0.$$

故 $\psi\circ f\circ\varphi$ 满足定理17(Schwarz引理)的条件.因此,当 $z(\neq 0)\in D$ 时

$$|\psi\circ f\circ\varphi(z)|\leqslant|z|$$

成立.令 $z=\varphi^{-1}(z_2)$,则有

$$|\psi\circ f(z_2)|\leqslant|\varphi^{-1}(z_2)|.$$

此即 $|\psi(w_2)|\leqslant|\varphi^{-1}(z_2)|$,这就是(5.4)式.

当 $z=0$ 时,则由定理17(Schwarz引理),就有

$$|(\psi\circ f\circ\varphi)'(0)|\leqslant 1,$$

此即

$$|\varphi'(w_1)f'(z_1)\varphi'(0)|\leqslant 1.$$

但是

$$\varphi'(z)=\frac{1-z_1\overline{z}_1}{(1+\overline{z}_1 z)^2},\quad \varphi'(0)=1-|z_1|^2;$$

$$\psi'(z)=\frac{1-w_1\overline{w}_1}{(1-\overline{w}_1 z)^2},\quad \psi'(w_1)=\frac{1}{1-|w_1|^2}.$$

所以有

$$|f'(z_1)|\leqslant\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2},$$

此即为(5.5)式.

由定理17,等号成立当且仅当

$$\varphi\circ f\circ\varphi(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}r}z=\rho_\tau(z),$$

故

$$f=\psi^{-1}\circ\rho_\tau\circ\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(D).$$

定理证毕.

事实上,在 D 上可以定义度量(双曲度量、Poincaré度量,见第5章5.1节):

$$\mathrm{d}_z s^2=\frac{|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

则(5.5)式就是 $\mathrm{d}_w s^2\leqslant\mathrm{d}_z s^2$.所以定理19也可叙述为:如果 $w=f(z)$ 为 D 上的全纯函数,将 D 映入到 D 内,则其Poincaré度量是不增的.保持Poincaré度量当且仅当 $f\in\mathrm{Aut}(D)$.于是,定理19给出了Schwarz引理的明确的微分几何的意义.

2.6 全纯函数的积分表示

Cauchy 积分公式(2.1)是全纯函数的一种积分表示.记$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z} = H(\zeta, z)$,称 $H(\zeta,z)$ 为 Cauchy 核,于是(2.1)式可以写为

$$f(z) = \int_{\partial U} f(\zeta) H(\zeta, z) \mathrm{d}\zeta.$$

也就是说:全纯函数 $f(z)$ 在 U 中一点 z 的值,可以由 Cauchy 核 $H(\zeta,z)$ 及 f 在 U 的边界 ∂U 上的值 $f(\zeta)$ 的积分表示.

由此还可以导出一些其他的积分表示.先给出调和函数的积分表示.

在 $U(z)$ 为单位圆 D 上的调和函数,且在 $\bar{D}$ 上连续,则由 2.5 节中证明的调和函数的均值性质,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}) \mathrm{d}\psi = U(0). \tag{6.1}$$

若 $a \in D$,则 $w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \in \mathrm{Aut}(D)$,且在 2.5 节中已经证明,这个变换将 ∂D 映到 ∂D.令 $U(w) = u(z)$,则 $u(z)$ 也是 D 上的调和函数,且 $U(0) = u(a)$.若 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$ 对应于 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$,即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - a}{1 - \bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}$,于是有

$$\mathrm{d}\psi = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2} \mathrm{d}\tau.$$

将上式代入(6.1)式,即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}) \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2} \mathrm{d}\tau = u(a). \tag{6.2}$$

记

$$P(\zeta, a) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - |a|^2}{|\zeta - a|^2},$$

这里,$\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$.称 $P(\zeta,a)$ 为 **Poisson 核**,用 z 来替代 a,于是(6.2)式可以写成

$$\int_0^{2\pi} u(\zeta) P(\zeta, z) \mathrm{d}\tau = u(z).$$

(6.2)式称为 **Poisson 积分公式**,这是在单位圆内调和,在 $\bar{D}$ 上连续的函数的积分

表示.也就是说,调和函数在单位圆内一点 z 的值可以用 Poisson 核及调和函数在单位圆周上的值的积分表示.

可以不困难地将(6.2)式推广为:若函数 u 在 $D(0,R)$ 上调和,在 $\overline{D}(0,R)$ 上连续,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\tau = u(z) \tag{6.3}$$

成立,这里,$\zeta = Re^{i\tau}, z \in D(0,R)$.同样称

$$P(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

为 Poisson 核.容易看出,(6.3)式还可以写成

$$u(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right]. \tag{6.4}$$

上式右边方括号中的函数为在 $|z|<R$ 中的全纯函数,故 u 为全纯函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + ic \tag{6.5}$$

的实部,这里,c 为任意常数.于是,$f(z)$ 可以写成 $u(z)+iv(z)$.

在(6.5)式的两边取虚部,就有

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{2\mathrm{Im}(z\overline{\zeta})}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\tau + c, \tag{6.6}$$

这里,$\zeta = Re^{i\tau}$.从上式显然得到 $c = v(0)$.

记

$$S(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{\zeta}.$$

称 $S(\zeta,z)$ 为 **Schwarz 核**.于是,(6.5)式可以写成

$$f(z) = \int_{|\zeta|=R} u(\zeta)S(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta + iv(0),$$

这是全纯函数的另一种积分表示.也就是说,全纯函数 f 在 $D(0,R)$ 中一点 z 上的值,可以用 Schwarz 核 $S(\zeta,z)$ 及 f 的实部 u 在 $\partial D(0,R)$ 上的值的积分表示.

同样,记

$$Q(\zeta,z) = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{Im}(z\overline{\zeta})}{|\zeta-z|},$$

称 $Q(\zeta,z)$ 为**共轭的 Poisson 核**.于是(6.6)式可以写成

$$v(z) = \int_0^{2\pi} u(\zeta)Q(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta + v(0),$$

这是调和函数的另一种积分表示.也就是说,调和函数 v 在 $D(0,R)$ 中一点 z 上的

值，可以用共轭 Poisson 核 $Q(\zeta,z)$ 及 v 的共轭调和函数 u 在 $\partial D(0,R)$ 上的值的积分表示. 这里，两个调和函数称为是共轭的，若它们为同一个全纯函数的虚部与实部.

除了 Cauchy 核以外，上面所讨论到的各种核中，最重要的是 Poisson 核. 这是因为它与很多方面都有联系. 在这里举出两个方面：一是与偏微分方程的联系；一是与调和分析的联系.

1. Poisson 积分与偏微分方程的联系

在偏微分方程中，有一类重要的问题是求椭圆型方程的 Dirichlet 问题的解. 也就是要求出函数，使之在区域内适合已给的椭圆型方程，而在边界上等于已给的函数. 用 Poisson 积分公式(6.3)，可以解如下 **Dirichlet 问题**：在区域 $D(0,R)$ 内适合 Laplace 方程，而在边界上等于已给的连续函数 $\varphi(Re^{i\tau})$. 这个问题的解就是 $u(z)=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\varphi(\zeta)d\tau$，这里，$\zeta=Re^{i\tau}$；而且这个解是唯一的.

现在来证明上述结论.

由

$$P(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right),$$

而 $\triangle=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$，故显然有 $\triangle P=0$. 因此

$$u(z)=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\varphi(\zeta)d\tau$$

在 $D(0,R)$ 上满足 $\triangle u(z)=0$ 是显然的. 要证 $\lim\limits_{z\to\xi}u(z)=\varphi(\xi)$，这里 $z\in D(0,R)$，$\xi\in\partial D(0,R)$. 由于 $\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)d\zeta=1$，故有

$$u(\rho e^{i\theta})-\varphi(Re^{i\theta_0})=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(Re^{i\theta_0}))d\tau,$$

这里，$\xi=Re^{i\theta_0}$，$z=\rho e^{i\theta}(0<\rho<R)$. 由于 φ 在 $|\zeta|=R$ 上是连续函数，故任给 $\varepsilon>0$，可以选取 $\delta>0$，使得当 $|\theta_0-\tau|<\delta$ 时，$|\varphi(Re^{i\theta_0})-\varphi(Re^{i\tau})|<\varepsilon$ 成立. 于是

$$\begin{aligned}u(\rho e^{i\theta})-\varphi(Re^{i\theta_0})&=\left(\int_{|\theta_0-\tau|<\delta}+\int_{|\theta_0-\tau|\geqslant\delta}\right)P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(Re^{i\theta_0}))d\tau\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然

$$|I_1| < \varepsilon\int_{|\theta_0-\tau|<\delta} P(\zeta,z)\mathrm{d}\tau < \varepsilon.$$

由于 $P(\zeta,z) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$，而在 I_2 中，$|\theta_0-\tau|>\delta$，故对任给的 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，必存在 $\eta>0$，使得当 $|z-\xi|<\eta$，且 $|\theta_0-\tau|>\delta$ 时，有 $|\zeta-z|>2R^2(1-\cos\delta)$ 及 $R^2-\rho^2<\dfrac{R^2}{M}(1-\cos\delta)\varepsilon$ 成立，这里，$M=\sup\limits_{|\zeta|=R}|\varphi(\zeta)|$. 于是 $|I_2|<\varepsilon$. 因此，当 ρ 充分接近 R 时，就有 $|u(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-\varphi(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})|<2\varepsilon$. 这就得到 $\lim\limits_{\rho\to R}u(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\varphi(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})$.

唯一性的证明是容易的. 如不然，设有两个解 u 及 v，则 u,v 在边界上取相同的值 $\varphi(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，故 $u-v$ 在边界上取值为零. 显然 $u-v$ 仍为调和函数. 由 Poisson 积分公式，边界上取零值的调和函数只有零函数.

2. Poisson 积分与调和分析的联系

在(6.3)式中取 $R=1$，即考虑的区域是单位圆 D，则(6.3)式的左边为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{d}\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2},\tag{6.7}$$

这里，$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$.

若 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$ 为在单位圆周 ∂D 上已给的连续函数，则 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$ 可以有 Fourier 级数

$$u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}\quad\left(a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\mathrm{d}\tau\right).$$

这个 Fourier 级数未必收敛，但可作它的 Abel 和，即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\rho^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}$. 经过简单的计算，可得这个 Abel 和就是(6.7)式右边的那个积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{d}\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}.$$

由前面叙述的 Dirichlet 问题的解知道，当 $\rho\to1$ 时，这个积分趋于 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，即

$$\lim_{\rho\to1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\rho^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}=u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}).$$

也就是说，在单位圆周 ∂D 上的连续函数 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$，其 Fourier 级数的 Abel 和，当 $\rho\to1$ 时，趋于 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$ 自己. 即连续函数的 Fourier 级数可 Abel 求和，这是调和分析中一条初等但重要的定理.

最后，可以应用 Dirichlet 问题的解，来证明在 2.5 节中已经说到的：具有均值性质的连续函数一定是调和函数. 事实上，可证如下的结论：

定理 20　若 $f(z)$ 是域 $U \subseteq C$ 上的连续实值函数，且 $f(z)$ 在 U 中满足局部均值性质，即对每一点 $z_0 \in U$，有充分小的 $r_0 > 0$，当 $0 < r \leqslant r_0$ 时

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta = f(z_0) \tag{6.8}$$

成立，则 $f(z)$ 在 U 上调和.

证明　任取 U 中的一点 z_0，则有 $r_0 > 0$，对所有满足 $0 < r \leqslant r_0$ 的 r，(6.8) 式成立. 令 $u_0(\theta) = f(z_0 + r_0 e^{i\theta})$，于是可以通过解 Dirichlet 问题，得到一个以 $u_0(\theta)$ 为边界值的在 $D(z_0, r_0)$ 中调和的函数 $u(z)$. 在 $\overline{D}(z_0, r_0)$ 上考虑函数 $f(z) - u(z)$，由于 $f(z)$ 及 $u(z)$ 都有均值性质，故 $f(z) - u(z)$ 也有均值性质. 在 2.5 节中已经指出，均值性质导出最大模原理，故 $|f(z) - u(z)|$ 在 $\partial D(z_0, r_0)$ 上取最大值. 但是 $f(z) - u(z)$ 在 $\partial D(z_0, r_0)$ 上为零，故由最大模原理知，$|f(z) - u(z)| \leqslant 0$. 由于 $f(z), u(z)$ 均为连续函数，故当 $z \in D(z_0, r_0)$ 时，有 $f(z) = u(z)$，即 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处为调和函数. 由于 z_0 是在 U 中任意取的，故 $f(z)$ 在 U 上调和.

习　题　2

1. 用 Cauchy 积分公式计算：

(i) $\int_{|z+i|=3} \sin z \dfrac{dz}{z+i}$;

(ii) $\int_{|z|=2} \dfrac{e^z}{z-1} dz$;

(iii) $\int_{|z|=4} \dfrac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$;

(iv) $\int_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z-1)^n (z-3)}$　$(n = 1, 2, \cdots)$;

(v) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$;

(vi) $\int_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^5 - 1}$;

(vii) $\int_{|z|=R} \dfrac{dz}{(z-a)^n (z-b)}$　(a, b 不在圆周 $|z| = R$ 上，n 为正整数)；

(viii) $\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z^3-1)(z-2)^2}$.

2. 证明：

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

这里，C 为围绕原点的一条简单闭曲线.

3. 若 f,g 为在单位圆 $|z|<1$ 中全纯，在 $|z|\leqslant 1$ 中连续的函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{zg(\zeta)}{z\zeta-1}\right)d\zeta=\begin{cases}f(z), & \text{当 } |z|<1,\\ g\left(\frac{1}{z}\right), & \text{当 } |z|>1.\end{cases}$$

4. 设

$$f(z)=\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta,$$

求 $f'(1+i)$.

5. 通过计算 $\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$，证明：

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=2\pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}.$$

6. 称 $p_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$ 为 Legendre 多项式，证明：

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

其中，γ 是其内部包含点 z 的简单闭曲线.

7. 若 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上全纯且满足 $|f(z)|\leqslant Me^{|z|}$，证明：

$$|f(0)|\leqslant M,$$

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}\leqslant M\left(\frac{e}{n}\right)^n\quad(n=1,2,\cdots).$$

8. **(外部 Cauchy 积分公式)** 设 γ 为一条可求长简单闭曲线，其内部为域 D_1，外部为域 D_2. 函数 $f(z)$ 在 D_2 内全纯，在 $D_2+\gamma$ 上连续，且 $\lim_{z\to\infty}f(z)=A$. 求证：

(1) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & \text{若 } z\in D_2,\\ A, & \text{若 } z\in D_1.\end{cases}$

(2) 若原点属于 D_1，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{zf(\zeta)}{z\zeta-\zeta^2}d\zeta=\begin{cases}f(z), & \text{若 } z\in D_2,\\ 0, & \text{若 } z\in D_1.\end{cases}$$

9. 若函数 $f(z)$ 在有界域 D 内全纯，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，并且 $f(z)\neq 0$. 证明：如

果在 ∂D 上 $|f(z)| = M$(常数),则 $f(z) = Me^{i\alpha}$,这里,α 为实的常数.

10. 若函数 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上全纯且有界,a,b 为任意两个复常数,求极限

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\mathrm{d}z.$$

由此得到 Liouville 定理的另一个证明.

11. 若函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内全纯,且

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\quad(|z|<1),$$

则对于 $0<r<1$,有

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{r^n(1-r)}.$$

特别取 $r = 1-\dfrac{1}{n+1}$,可以得到

$$|f^{(n)}(0)|<\mathrm{e}(n+1)!\quad(n=1,2,\cdots).$$

12. **(Cauchy 型积分)** 若函数 $\varphi(\zeta)$ 在一条可求长曲线 γ 上连续,证明函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$

在不包含 γ 上的点的任意域 D 内是全纯的,且

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

13. 若函数 $f(z)$ 在有界域 D 内全纯,且不为常数,在 $\bar{D}$ 上连续.若 $f(z)\neq 0$,$m=\inf\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$,$M=\sup\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$,则在 D 内的任一点 z,有 $m<|f(z)|<M$.

14. 若 $p_n(z)$ 为 n 次多项式,当 $|z|<1$ 时,$|p_n(z)|\leqslant M$,则当 $1\leqslant|z|\leqslant+\infty$ 时,$|p_n(z)|\leqslant M|z|^n$.

15. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内全纯,且 $|f(z)|\leqslant M$,$f(0)=0$,则

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|,\qquad|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

其中等号成立当且仅当 $f(z)=\dfrac{M}{R}\mathrm{e}^{i\alpha}z$,这里,$\alpha$ 为实数.

16. 应用定理 5 证明推论 1.

17. 在证明定理 13 时,用到了"由内闭一致收敛的条件可以导出极限与积分可以交换的结论".证明这个结论.

18. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯,且 $\mathrm{Re}\,f(z)>0$,$f(0)=\alpha>0$,则

$$\left|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right|\leqslant|z|,\qquad|f'(0)|\leqslant 2\alpha.$$

19. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $f(0)=0$，$\mathrm{Re}\,f(z)\leqslant A\ (A>0)$，则

$$|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

20. 求下列函数在 $z=0$ 处的 Taylor 展开，并求出其收敛半径：

(ⅰ) $\dfrac{e^{z}+e^{-z}+2\cos z}{4}$；　　(ⅱ) $\dfrac{z^2+4z^4+z^6}{(1-z^2)^3}$；

(ⅲ) $(1-z^{-5})^{-4}$；　　(ⅳ) $\dfrac{z^6}{(z^2-1)(z+1)}$.

21. (1) 若 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上全纯，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为其在 $z=0$ 处的 Taylor 展开，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta.$$

(2) 若(1)中的 $r=1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}=\frac{1}{\pi}\iint_D|f(z)|^2dA,$$

这里，D 为单位圆 $|z|\leqslant1$，dA 为面积元素.

22. 证明公式(6.3)和(6.4).

23. 证明方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有一个根，在 $1<|z|<2$ 中有三个根.

24. 求方程 $z^7-5z^4-z+2=0$ 在圆 $|z|<1$ 内的根的个数.

25. 证明 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限内恰有一个根.

26. 求方程 $z^4-8z+10=0$ 在圆 $|z|<1$ 及圆环 $1<|z|<3$ 内的根的个数.

27. 证明：若 $a>e$，则方程 $e^z=az^n$ 在圆 $|z|<1$ 内有 n 个根.

28. 若 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，在圆 $|z|\leqslant1$ 上连续，且 $|f(z)|<1$，则 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内有唯一的不动点.

29. (1) 求一全纯函数，其实部为 $e^x(x\cos y-y\sin y)\ (z=x+iy)$.

(2) 求形如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的最一般的调和函数，这里，a,b,c,d 为实常数.

30. 应用调和函数的均值性质，证明：若 $-1<r<1$，则

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0.$$

31. 证明：如果在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上，调和函数 $u(z)$ 是有界的，则 $u(z)$ 恒等于

常数.

32. 求在 $|z|<1$ 内的调和函数,使其在 $|z|=1$ 上的一段弧上取值为 1,而在圆周的其余部分取值为零.

33. 若 U 为域,$f_i(z)$ $(i=1,2,\cdots)$ 都是在 U 上全纯、在 $\bar{U}$ 上连续的函数.证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 的边界 ∂U 上一致收敛,则必在 $\bar{U}$ 上一致收敛.

34. 若 $f(z)$ 在 $D(0,R)$ 上全纯,在 $\bar{D}(0,R)$ 上连续,$M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$.证明:若 $z_0 \in D(0,R)\setminus\{0\}$ 是 $f(z)$ 的零点,则

$$R\,|f(0)| \leqslant (M+|f(0)|)\,|z_0|.$$

35. 若 $|z_1|>1$, $|z_2|>1$, $\cdots$, $|z_n|>1$. 证明:在单位圆周 $|z|=1$ 上存在点 z_0,使得 $\prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$.

36. 若函数 $f(z)$ 在 $D(0,R)$ 上全纯.证明:

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

是$[0,R)$ 上的增函数.

37. 利用最大模原理证明代数基本定理.

38. 若 $f(z)$ 是域 U 上非常数的全纯函数,且在 U 中没有零点,则 $|f(z)|$ 在 U 内不能取得最小值.

39. (**Hadamard 三圆定理**)若 $0<r_1<r_2<+\infty$, $U=\{z\in \mathbf{C}\mid r_1<|z|<r_2\}$, $f(z)$ 在圆环 U 上全纯,在 $\bar{U}$ 上连续,$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.证明:$\ln M(r)$ 在 $[r_1,r_2]$ 上是 $\ln r$ 的凸函数,即当 $r\in[r_1,r_2]$ 时,不等式

$$\ln M(r) \leqslant \frac{\ln r_2-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_1)+\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}\ln M(r_2)$$

成立.

40. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯,且 $f(0)=0$.证明:$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ 在 $D(0,1)$ 上绝对且内闭一致收敛.

41. 若 $f(z)$ 在 $D(0,R)$ 上全纯,且 $f(0)=0$.如果 $D(0,R)$ 在 $f(z)$ 映射下的像 $f(D(0,R))\subset D(0,M)$,则

(1) 不等式 $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}|z|$, $|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$ 对所有 $z\in D(0,R)\setminus\{0\}$ 都成立.

(2) 上述不等式等号成立当且仅当 $f(z)=\dfrac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$,这里,$\theta$ 为任意实数.

42. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(0)=0$. 如果存在常数 $A>0$，使得 $\operatorname{Re} f(z)\leqslant A$ 对每个 $z\in D(0,1)$ 都成立，则 $|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|}$ 对每个 $z\in D(0,1)$ 都成立.

43. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(0)=1$. 如果对每一个 $z\in D(0,1)$，$\operatorname{Re} f(z)\geqslant 0$ 成立，利用 Schwarz 引理证明：

(1) 不等式

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant \operatorname{Re} f(z)\leqslant f(z)\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

对每个 $z\in D(0,1)$ 都成立.

(2) 上述不等式中等号在 z 异于零时成立，当且仅当

$$f(z)=\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z},$$

这里，θ 为任意实数.

44. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯. 证明存在 $z_0\in\partial D(0,1)$ 及在 $D(0,1)$ 中存在收敛于 z_0 的点列 $z_1,z_2,\cdots$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ 存在.

45. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(D(0,1))\subset D(0,1)$. 若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 中的所有彼此不同的零点，其次数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，则

$$|f(z)|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_jz}\right|^{k_j}$$

对所有 $z\in D(0,1)$ 都成立. 特别地，有 $|f(0)|\leqslant\prod\limits_{j=1}^{n}|z_j|^{k_j}$.

46. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(D(0,1))\subset D(0,1)$，则不等式 $M|f'(0)|\leqslant M^2-|f(0)|^2$ 成立.

47. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯，且 $f(0)=0$. 如果 $|\operatorname{Re} f(z)|<1$ 对所有 $z\in D(0,1)$ 都成立，则下列不等式

(i) $|\operatorname{Re} f(z)|\leqslant\frac{4}{\pi}\arctan|z|$;

(ii) $|\operatorname{Im} f(z)|\leqslant\frac{2}{\pi}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}$

对所有 $z\in D(0,1)$ 都成立.

48. 求出上半平面 $\boldsymbol{C}^+=\{z\in\boldsymbol{C}\mid\operatorname{Im} z>0\}$ 的全纯自同构群 $\operatorname{Aut}(\boldsymbol{C}^+)$.

49. 若 $f(z)$ 在 $D(0,1)\cup\{1\}$ 上全纯，且 $f(0)=0,f(1)=1,f(D(0,1))\subset D(0,1)$，则 $f'(1)\geqslant 1$.

50. 若 $f(z)$ 是有界整函数，z_1, z_2 是 $D(0,r)$ 中的任意两点，则

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 0,$$

并由此得出 Liouville 定理.

附录　单位分解定理

1. 在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上，定义

$$\theta(z) = \begin{cases} k\exp\left(-\dfrac{1}{1-|z|^2}\right), & \text{当 } |z|<1, \\ 0, & \text{当 } |z|\geqslant 1, \end{cases}$$

这里，k 是一个常数，使得 $\int_{\boldsymbol{C}} \theta(z) \mathrm{d}A = 1$，而 $\mathrm{d}A$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的面积元素. 易证 $\theta(z)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的 C^∞ 函数，且在 $|z|<1$ 中，$\theta(z)$ 严格大于零，而 $\operatorname{supp}\theta(z)$ 就是 $|z|\leqslant 1$. 称 $\theta(z)$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的标准函数(standard function). 若 $\varepsilon>0$ 为一个常数，令 $\theta_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\theta\left(\dfrac{z}{\varepsilon}\right)$，则 θ_ε 与 θ 有相同的性质，且 $\operatorname{supp}\theta_\varepsilon(z)$ 就是 $|z|\leqslant\varepsilon$.

若 $\Omega\subset\boldsymbol{C}$ 为一开集，所有在 $\boldsymbol{C}$ 上属于 C^∞，且其紧致支集在 Ω 之中的实函数的全体组成空间，记作 $\mathscr{D}(\Omega)$. 于是可证

2. 若 $\Omega\subset\boldsymbol{C}$ 为一开集，$\mathscr{B}$ 为 Ω 的一组开集基，则在 $\mathscr{B}$ 中存在一个序列 $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$，使得

(1) $\bigcup_{j\geqslant 1} U_j = \Omega$；

(2) 对 Ω 中任一紧集 K，只与 $\{U_j\}_{j\geqslant 1}$ 中有限个相交.

证明　若 $K_{-1}=\varnothing, K_0=\varnothing, K_1, K_2, \cdots, K_n, \cdots$ 为一个紧集序列，且穷竭(exhaustion) Ω，也就是：

(ⅰ) K_j 包含在 K_{j+1} 的内部(即内点的全体) $\mathring{K}_{j+1}$ 之中；

(ⅱ) $\Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} K_j$.

令 $W_r = \mathring{K}_{r+1}\setminus K_{r-2}$，$V_r = K_r\setminus\mathring{K}_{k-1}$ $(r\geqslant 1)$，则 W_r 是开的，V_r 是紧的，且 $V_r \subseteq W_r$，$\Omega = \bigcup_{r\geqslant 1} V_r$.

对 V_r 中的每一个点 z，存在 $U_{z,r}\in\mathscr{B}$，使得 $z\in U_{z,r}\subseteq W_r$. 由于 V_r 是紧的，

所以在 V_r 中存在有限个点 $z_{r,1},\cdots,z_{r,k_r}$，使得

$$V_r \subseteq \bigcup_{1\leqslant i\leqslant k_r} U_{z_{r,i},r} \subseteq W_r,$$

而 $\{U_{z_{r,i},r}\}_{r\geqslant 1}$ 是可数的，且满足(1) 与(2)，这是因为 Ω 中任一紧集 K，只与有限个 $\{W_r\}$ 相交.

具有性质(1) 的 $\{U_j\}_{j\geqslant 1}$ 称为 Ω 的开覆盖(open covering)，性质(2) 表示开覆盖是局部有限(locally finite) 的.

3. 单位分解定理　若 Ω 为 $\boldsymbol{C}$ 中的一个非空开子集，$\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 为 Ω 的一个开覆盖，这里，I 为一个非负整数集合. 于是在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中存在序列 $\alpha_1(z),\alpha_2(z),\cdots,\alpha_n(z),\cdots$，使得

(1) 对每一个 $j\geqslant 1$，有对应的 $i=i(j)\in I$，使得 $\operatorname{supp}\alpha_j\subseteq\Omega_i$，且集合 $\{\operatorname{supp}\gamma_j\}_{j\geqslant 1}$ 是局部有限的；

(2) 对每一个 $j\geqslant 1, 0\leqslant\alpha_j\leqslant 1$；

(3) 对每一个 $z\in\Omega$，有 $\sum\limits_{j\geqslant 1}\alpha_j(z)=1$.

序列 $\{a_j(z)\}_{j\geqslant 1}$ 称为从属于覆盖 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 的 C^∞ 单位分解.

证明　对每一个 $z\in\Omega$，存在 $r_z>0$，使得以 z 为中心，r_z 为半径的圆的闭包 $\overline{B}(z,r_z)\subseteq\Omega_{i_z}$，这里，$i_z\in I$. 所有 $B(z,r)$ $(z\in\Omega, 0<r<r_z)$ 的全体组成 Ω 的开集基，于是由第 2 小段所证，有序列 $\{B(z_j,r_j)\}_{j\geqslant 1}$ 满足上述 2 中的条件(1)与(2)，而

$$B(z_j,r_j)\subseteq\overline{B}(z_j,r_j)\subseteq\Omega_{i(j)},$$

这里，$i(j)=i_{z_j}$. 若 θ 为标准函数，令 $\beta_j(z)=\theta_{r_j}(z-z_j)$，则 $\beta_j\in\mathscr{D}(\Omega)$，而 $\{\operatorname{supp}\beta_j\}_{j\geqslant 1}$ 是局部有限的. 于是

$$s(z)=\sum_{j\geqslant 1}\beta_j(z)$$

在 Ω 上是 C^∞ 的，且当 $z\in\Omega$ 时，$s(z)>0$. 令 $\alpha_j(z)=\dfrac{\beta_j(z)}{s(z)}$，这就得到定理中所要的序列.

4. 若 $\Omega\subset\boldsymbol{C}$ 为开集，K 为 Ω 中的一个紧致子集，V 为 K 的一个开邻域，$V\subseteq\Omega$，则存在 $\varphi\in\mathscr{D}(V)$，使得

(1) $0\leqslant\varphi\leqslant 1$；

(2) 在 K 的一个邻域上，$\varphi\equiv 1$.

证明　对于 $\varepsilon>0$，记 $V(K,\varepsilon)=\{z\in\boldsymbol{C}\mid\operatorname{dist}(z,K)>\varepsilon\}$，这里，$\operatorname{dist}(z,K)$ 表示 z 与 K 之间的距离. 选取 $\varepsilon>0$，使得 $K\subseteq V(K,\varepsilon)\subseteq\overline{V}(K,2\varepsilon)\subseteq V$. 取 Ω_1

$= V(K, 2\varepsilon)$，$\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{V}(k, \varepsilon)$，则 Ω_1，Ω_2 组成 Ω 的一个开覆盖. 由单位分解定理，有 $\{\alpha_j(z)\}_{j \geq 1}$ 满足第 3 小段中的(1)，(2)，(3). 定义

$$\varphi(z) = \sum_j{}' \alpha_j(z),$$

这里，$\sum'$ 表示只对那些 supp $\alpha_j(z) \subseteq \Omega_1$ 的 j 求和. $\varphi(z)$ 显然属于 $\mathscr{D}(\Omega)$，supp $\alpha_j(z) \subseteq V(K, 2\varepsilon)$，且在 K 的一个邻域上，$\varphi \equiv 1$. 这是因为那些在 $\sum\limits_j{}'$ 中不出现的 k，必有 supp $\alpha_k \nsubseteq \Omega_1$. 因此，supp $\alpha_k \subseteq \Omega_2$. 于是在 $\overline{V}(K, \varepsilon)$ 上，$\alpha_k(z) = 0$. 因而当 $z \in V(K, \varepsilon)$ 时，$\varphi(z) = \sum\limits_{j \geq 1} \alpha_j(z) = 1$. 这就证明了 4 的结论.

第 3 章　Weierstrass 级数理论

3.1　Laurent 级数

Weierstrass 理论之一是用级数来研究与刻画函数的性质.在第 1 章、第 2 章中已经讲到了全纯函数的幂级数展开以及函数项级数等,这些结果与微积分中的级数理论大部分是一样的.但也有一些不同之处,如第 1 章中定理 3 的(3).当然,更重要的是与微积分中级数理论不相同的部分.在复变函数的级数理论中,与微积分级数理论最大的不同之处是:除了 Taylor 级数外,还有 Laurent 级数.一个函数的特性,除了全纯部分外,是由它的奇性所决定的.而用来刻画、研究奇性的有力工具就是 Laurent 级数.在介绍 Laurent 级数之前,先介绍一个有关函数项级数的 Weierstrass 定理,这是一条深刻的定理,这个定理在微积分中是没有的.

定理 1(Weierstrass 定理)　若$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 上内闭一致收敛(即在 U 内任一闭集上一致收敛)到 $f(z)$,则 $f(z)$ 在 U 上全纯,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n{}^{(k)}(z)$ 内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$ $(k=1,2,\cdots)$.

定理 1 是很深刻的结果,它告诉我们:如果全纯函数项级数在域 U 上内闭一致收敛,则这个级数收敛到一个全纯函数,且逐项求导后的级数也内闭一致收敛到全纯函数的导数.(请读者回顾一下微积分中函数项级数逐项求导的定理,与定理 1 相比较.)

定理 1 的证明　由第 1 章定理 4 知, $f(z)$ 在 U 上有定义且连续.

若 K 为 U 内任一圆周,其内部属于 U, γ 为 K 内任一可求长闭曲线.由于

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛,故由第 1 章定理 4,得

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma} f_n(z)\mathrm{d}z = 0,$$

这是因为 $f_n(z)$ 在 K 内全纯. 由$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$,由 Morera 定理(第 2 章 2.3 节的定理 7) 得到 $f(z)$ 在 K 内全纯,故 $f(z)$ 在 U 上全纯.

若 $z_0 \in U, \overline{D}(z_0, r) \subset U$,则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$ 在 $\partial D(z_0, r)$ 上一致收敛到 $f(\zeta)$. 若 $z \in D(z_0, r/2)$,则由第 2 章 2.3 节推论 1,有

$$\sup_{z\in \overline{D}(z_0, r/2)} \left| \sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| \leqslant c_n \sup_{z\in D(z_0, r)} \left| \sum_{j=1}^{n} f_j(z) - f(z) \right|$$

成立. 而当 $n \to \infty$ 时,上式右边趋于零. 故$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 在 $D(z_0, r/2)$ 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

对于 U 中任一有界闭域 $\overline{d}$,在 $\overline{d}$ 的每一点邻域内 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 这些邻域构成 $\overline{d}$ 的一个开覆盖,由 Heine-Borel 定理,从中可以选出 $\overline{d}$ 的有限个开覆盖. 因此,$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 在 $\overline{d}$ 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 证毕.

由最大模原理可得:若 $D \subseteq \mathbf{C}$ 为有界域,若$\{f_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内全纯,在 $\overline{D}$ 上连续,且级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛. 因此,定理 1 中的条件"$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 上内闭一致收敛到 $f(z)$"可以改为"$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 中任一闭曲线上一致收敛到 $f(z)$",定理 1 依然成立.

现在来定义并讨论 Laurent 级数.

若 $a \in \mathbf{C}, c_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为复常数,则称

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1.1}$$

为在 a 点的 **Laurent 级数**. 即 Laurent 级数由两部分组成:一部分是非负幂的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$;一部分是负幂的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$. 若这两部分都在点

$z = z_0$ 处收敛，则称 Laurent 级数在这点收敛. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R，且 $R > 0$，则级数在 $|z-a| < R$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，故级数的和（记作 $\varphi(z)$）在 $|z-a| < R$ 上全纯. 记 $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设其收敛半径为 λ，且 $\lambda > 0$，则级数在 $|\zeta| < \lambda$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 在 $r = \dfrac{1}{\lambda} < |z-a| < \infty$ 内绝对收敛且内闭一致收敛，级数的和（记作 $\psi(z)$）在 $r < |z-a| < \infty$ 上全纯. 如果 $r > R$，则级数(1.1) 处处发散. 如果 $r = R$，则级数(1.1) 除了 $|z-a| = R$ 的点外，处处发散；而在 $|z-a| = R$ 上有不同的情形，如 $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| = 1$ 上处处收敛，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ 在 $|z| = 1$ 上处处发散，$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 在 $|z| = 1$ 上除了 $z = 1$ 外处处收敛. 如果 $r < R$，则级数(1.1) 在圆环 $r < |z-a| < R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛，在圆环外发散，称圆环为级数(1.1) 的收敛圆环. 由定理 1，级数(1.1) 在圆环内收敛到一个全纯函数. $\varphi(z)$ 在 $|z-a| < R$ 内全纯，$\psi(z)$ 在 $r < |z-a| < \infty$ 内全纯，而 $f(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ 在 $r < |z-a| < R$ 内全纯，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 称为级数(1.1) 的**全纯部分**，$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 称为级数(1.1) 的**主要部分**(principal part) 或奇异部分，即函数 $f(z)$ 的特性主要由这部分所决定.

归纳起来，若 Laurent 级数(1.1) 的收敛圆环为 $r < |z-a| < R$，则级数(1.1) 在此圆环内绝对收敛且内闭一致收敛，和函数 $f(z)$ 在此圆环上全纯. 反过来，有

定理 2　若函数 $f(z)$ 在圆环 V：$r < |z-a| < R$ $(0 \leqslant r < R < \infty)$ 上全纯，则 $f(z)$ 在 V 上有展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1.2}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (r < \rho < R). \tag{1.3}$$

展开式(1.2) 是唯一的，称为 $f(z)$ 在圆环 V 上的 Laurent 展开式，或 Laurent 级数.

证明 (1.3) 式中的积分与 ρ 无关($r<\rho<R$).若 $r<\rho_1<\rho_2<R$,则

$$\int_{|\zeta-a|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\int_{|\zeta-a|=\rho_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

若 $z\in V$,在 V 内取 $\gamma_1=\partial D(a,r_1),\gamma_2=\partial D(a,r_2),r_1<r_2$,而 z 在圆环 $r_1<|z-a|<r_2$ 之内(见图 3.1).由 Cauchy 积分公式得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta. \tag{1.4}$$

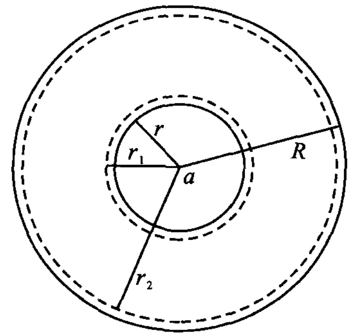


图 3.1

当 $\zeta\in\gamma_1$ 时,有

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n},$$

这是因为 $\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$,上式右边的级数是在 γ_1 上一致收敛的;当 $\zeta\in\gamma_2$ 时,有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

这是因为 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$,上式右边的级数是在 γ_2 上一致收敛的.将这两个式子代入(1.4) 式,就有(1.2) 式及(1.3) 式.

最后证明唯一性.设 $f(z)$ 在 U 上还有另一个 Laurent 级数展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-a)^n\quad(r<|z-a|<R). \tag{1.5}$$

(1.5) 式右边的级数在 $|z-a|=\rho$ $(r<\rho<R)$ 上一致收敛到 $f(z)$,以 $\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$ 乘(1.5) 式的两边,然后在 $|z-a|=\rho$ 上积分,由一致收敛性,有

$$\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-m-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_m',$$

这是因为

$$\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^k\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & 若\ k=-1,\\ 0, & 若\ k\neq-1.\end{cases}$$

于是 $c_m'=c_m(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.这就证明了级数的唯一性.证毕.

3.2 孤立奇点

若函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域$D(a,R)\setminus\{a\}$ 上全纯，则称 a 点为$f(z)$ 的一个孤立奇点. 若 a 为$f(z)$ 的一个孤立奇点，由定理 2, $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 上可展开成 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

而

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(0<\rho<R,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如上一节所说那样，$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$，这里

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{2.1}$$

在 $|z-a|<R$ 上全纯，为 $f(z)$ 的 Laurent 展开式的全纯部分，而

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{2.2}$$

在 $0<|z-a|<\infty$ 上全纯，为 $f(z)$ 的 Laurent 展开式的主要部分.

讨论$\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 的情形，有下述三种可能：

(1) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有限，则由 Riemann 定理(第 2 章 2.3 节定理 9), $f(z)$ 可解析开拓到 $D(a,R)$.(作为练习，建议读者用定理 2 直接证明.) 因此，(2.2) 式中的 c_{-n} 全为零. 反之，若(2.2) 式中的 c_{-n} 全为零，则 $f(z)=\varphi(z)$，而$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\varphi(a)$. 故$\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有限当且仅当 c_{-n} 全为零，这时称 a 为**可去奇点**.

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且无限，则充要条件为：(2.2) 式中的 c_{-n} 只有有限个不为零，即

$$\psi(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}\quad(c_{-m}\neq0).$$

而

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

$$= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

$$= \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

其中

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots \quad (c_{-m} = g(a) \neq 0),$$

这时称 a 为 $f(z)$ 的一个 **m 级极点**. $m = 1$ 时,称为**简单极点**.

证明 充分性是显然的. 只需证必要性.

因为 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$,故存在 $\delta > 0$,使得在 $0 < |z-a| < \delta$ 内,$f(z) \neq 0$. 于是在 $0 < |z-a| < \delta$ 内,$F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 全纯,且不为零,并有 $\lim\limits_{z\to a} F(z) = 0$. 由(1),$a$ 为 $F(z)$ 的可去奇点,且为 $F(z)$ 的一个零点. 设 a 为 $F(z)$ 的一个 m 级零点,则 $F(z) = (z-a)^m \lambda(z)$. 这里,$\lambda(z)$ 在 $|z-a| < \delta$ 上全纯,且可取 a 的一个邻域,使 $\lambda(z)$ 在此邻域内不为零,不妨设此邻域为 $|z-a| < \delta$. 因此,$\dfrac{1}{\lambda(z)}$ 在 $|z-a| < \delta$ 上全纯且不为零,其 Taylor 展开式为

$$\frac{1}{\lambda(z)} = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots \quad (c_{-m} \neq 0, \ |z-a| < \delta).$$

于是

$$f(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{(z-a)^m \lambda(z)}$$

$$= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots.$$

由 Laurent 展开式的唯一性,得证(2).

从(1),(2) 立即得到

(3) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在,其充要条件为(2.2) 式的系数 c_{-n} 有无穷多个不为零,这时称 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**. 例如,$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$,$z = 0$ 为其本性奇点,因为 $\lim\limits_{z=x\to 0^+} e^{\frac{1}{z}} = +\infty$,而 $\lim\limits_{z=x\to 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0$,故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

对于本性奇点,有如下重要的

定理 3(Weierstrass 定理) 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点,任给 $\delta > 0$,则对任意有限复数 A 及正数 $\varepsilon > 0$,在 $0 < |z-a| < \delta$ 内有一点 z,使得 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立,即 $f(z)$ 在本性奇点的邻域内的取值在 $\mathbf{C}$ 上是稠密的.

证明 如不然,存在有限复数 A 及 $\varepsilon > 0$,在 $0 < |z-a| < \delta$ 内 $|f(z) - A|$

$>\varepsilon$. 于是

$$F(z)=\frac{f(z)-A}{z-a}$$

在 $0<|z-a|<\delta$ 上全纯，而当 $z\to a$ 时，$F(z)\to\infty$. 故 a 为 $F(z)$ 的极点，由(2)，得

$$F(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots,$$

因此

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}+(A+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots.$$

所以 a 或者是 $f(z)$ 的 $m-1$ 级极点(当 $m>1$ 时)，或者是 $f(z)$ 的可去奇点(当 $m=1$ 时)，这与定理的条件相矛盾. 证毕.

Weierstrass 定理十分深刻地刻画了 $f(z)$ 在一个本性奇点附近的值的分布性质. 但 1879 年，Picard 证明了更为一般、更为深刻的 **Picard 定理**：全纯函数在一个本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有限复值，至多除去一个例外值. 关于 Picard 定理，将在第 5 章中证明.

以上讨论孤立奇点是有限复数的情形，现在讨论孤立奇点是无穷远点的情形.

若函数 $f(z)$ 在圆环 V：$R<|z|<\infty$ $(R>0)$ 上全纯，$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 这时候，作变换 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，将 $z=\infty$ 的邻域变为 $\zeta=0$ 的邻域，于是 $g(\zeta)=f(z)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ 在 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ 上全纯，且可展开成 Laurent 级数

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\zeta^{-n}=\varphi(\zeta)+\psi(\zeta).$$

$\varphi(\zeta)$ 为 $g(\zeta)$ 的 Laurent 展开式的全纯部分，而 $\psi(\zeta)$ 为 $g(\zeta)$ 的 Laurent 展开式的主要部分. 于是

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=\varphi_0(z)+\psi_0(z),$$

其中，$\varphi_0(z)$ 为 $f(z)$ 的 Laurent 展开式的全部纯部分，$\psi_0(z)$ 为 $f(z)$ 的 Laurent 展开式的主要部分. 故

(1) 当 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点时

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots.$$

(2) 当 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m 级极点时

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m \quad (c_m \neq 0).$$

(3) 当 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点时

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

3.3 整函数与亚纯函数

若函数 $f(z)$ 除了无穷远点外，在 $\mathbf{C}$ 上是全纯的，则称 $f(z)$ 为一个**整函数**(entire function). 于是，$f(z)$ 的 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.1}$$

在 $\mathbf{C}$ 上成立. $z = \infty$ 是孤立奇点，由 Laurent 展开式的唯一性，(3.1) 式也是 $f(z)$ 在无穷远点的邻域内的 Laurent 展开式. 于是有三种可能：

(1) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则由 Liouville 定理(第 2 章 2.3 节定理 8)，$f(z)$ 为常数.

(2) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的一个 m 级极点，则当 $n > m$ 时 $c_n = 0$，即 $f(z)$ 为一个 m 次多项式：

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m \quad (c_m \neq 0).$$

(3) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的一个本性奇点，则

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

其中，$c_n (n \geqslant 1)$ 有无穷多个不为零，这时称 $f(z)$ 为**超越整函数**. 例如，e^z，$\sin z$，$\cos z$，等等.

若函数 $f(z)$ 除了无穷远点外，在 $\mathbf{C}$ 上只有极点(极点的个数可为有限个，也可为无限个)，则称 $f(z)$ 为一个**亚纯函数**(meromorphic function). 整函数是亚纯函数，有理函数 $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 也是亚纯函数，其中，$P_n(z)$，$Q_m(z)$ 为两个既约多项式：

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0),$$
$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \quad (b_m \neq 0).$$

$Q_m(z)$ 的零点是 $f(z)$ 的极点. 由于

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{b_0}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{若 } m = n, \\ \infty, & \text{若 } n > m, \\ 0, & \text{若 } n < m, \end{cases}$$

即 $z = \infty$ 或者是 $f(z)$ 的可去奇点,或者是极点.

反过来,有如下的

定理 4 若 $z = \infty$ 为亚纯函数 $f(z)$ 的可去奇点或极点,则 $f(z)$ 必为有理函数.

证明 由于 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或极点,故存在 $R > 0$,使得 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 上全纯. 设 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的邻域内的 Laurent 展开式的主要部分为 $p(z)$. 当 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点时, $p(z) \equiv 0$;当 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的极点时, $p(z)$ 是一个多项式.

在圆 $|z| \leqslant R$ 上, $f(z)$ 只能有有限个极点. 如不然, $f(z)$ 有无穷多个极点,由 Bolzano-Weierstrass 定理,这无穷多个极点必有极限点 z_0, z_0 在 $|z| \leqslant R$ 上, z_0 就是 $f(z)$ 的一个非孤立奇点. 但这不可能,因为 $f(z)$ 为亚纯函数. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 是 $f(z)$ 的极点,在 $z_i (i = 1, \cdots, k)$ 的邻域内, $f(z)$ 的 Laurent 展开式的主要部分为

$$\psi_i(z) = \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - z_i} + \cdots + \frac{c_{-m}^{(i)}}{(z - z_i)^m} \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

全纯部分为 $\varphi_i(z)$,于是函数

$$F(z) = f(z) - p(z) - \sum_{i=1}^{k} \psi_i(z)$$

除去 $z_1, z_2, \cdots, z_k, \infty$ 外,在 C 上全纯,而这些点是 $F(z)$ 的可去奇点. 事实上,当 $z \to z_i$ 时, $\lim\limits_{z\to z_i}(f(z) - \psi_i(z)) = \varphi_i(z_i)$,而 $\sum\limits_{m\neq i}\psi_m(z) - p(z)$ 在 z_i 是全纯的, $\lim\limits_{z\to z_i} F(z)$ 存在且有限. 在 $z = \infty$ 处, $f(z) - p(z)$ 是 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的邻域内的 Laurent 展开式的全纯部分,故 $\lim\limits_{z\to\infty}(f(z) - p(z))$ 存在且有限,而 $\lim\limits_{z\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} \psi_i(z) = 0$. 于是 $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$ 有限. 故 $F(z)$ 在 C 上全纯. 由 Liouville 定理, $F(z)$ 为常数 c. 因此

$$f(z) = c + p(z) + \sum_{i=1}^{k} \psi_i(z),$$

即为有理函数.定理证毕.

除去有理函数外的亚纯函数称为**超越亚纯函数**.超越亚纯函数或以 $z = \infty$ 为本性奇点,或以 $z = \infty$ 为它的极点的极限点.

第2章2.5节中已经给出了单位圆的全纯自同构群(第2章定理18),现在可以定出复平面 $\boldsymbol{C}$ 及扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$(即 $\boldsymbol{C}$ 加上无穷远点 ∞),也即 Riemann 球 S^2 的自同构群.

先来定出复平面 $\boldsymbol{C}$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$.

若 $\alpha(z) \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$,则 $\alpha(z)$ 一定将 ∞ 点映为 ∞ 点.由于映射是自同构的,故为一对一的.因此,$\alpha(z)$ 在 ∞ 点有单极点,根据前述结果,$\alpha(z)$ 一定是一个一次多项式,即 $\alpha(z) = az + b$ $(a, b \in \boldsymbol{C}, a \neq 0)$.反过来,若 $a, b \in \boldsymbol{C}, a \neq 0$,易见 $az + b \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$.故 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ 是由所有的线性变换 $\{az + b \mid a, b \in \boldsymbol{C}, a \neq 0\}$ 所组成的,即 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ 是由平移(translation)$\alpha(z) = z + b$ 及伸缩(dilation)$\alpha(z) = az$ 的复合所组成的.

再来定出 $\boldsymbol{C}^*$,即扩充复平面的亚纯自同构群 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$.

若 $\alpha(z) \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$,且 $\alpha(\infty) = \infty$,由于自同构是一对一的,故 $\alpha(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上是属于 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ 的.因此 $\alpha(z) = cz + d$,这里 $c, d \in \boldsymbol{C}, c \neq 0$.显然,若 $a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$,且 $ad - bc \neq 0$,容易直接验证 $\alpha(z) = \dfrac{az + b}{cz + d} \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$.

若 $a(z) \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$ 且 $\alpha(\infty) \neq \infty$,则 $\beta(z) = \dfrac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)} \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$,且 $\beta(\infty) = \infty$,所以 $\beta(z) = cz + d$,这里 $c, d \in \boldsymbol{C}, c \neq 0$.于是 $cz + d = \dfrac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)}$,由此可解出 $\alpha(z)$,得到 $\alpha(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$,这里 $a = \alpha(\infty)c, b = d\alpha(\infty) + 1$,故 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$ 是由所有分式线性变换 $\left\{\dfrac{az + b}{cz + d} \middle| ad - bc = 1\right\}$ 所组成的.即 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$ 是由平移 $\alpha(z) = z + b$,伸缩 $\alpha(z) = az$ 以及反演(inversion)$\alpha(z) = 1/z$ 的复合所组成的.如果令 $\dfrac{az + b}{cz + d}$ 与二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 一一对应,则 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$ 与所有的方阵

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1\right\} / \{\pm I\}$$

所组成的群相同构,这里,$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$为单位阵.这个群称为 Möbius 变换群,实际上是 $SL(2,\boldsymbol{C})/\{\pm I\}$,这里 det 表示行列式,$SL(2,\boldsymbol{C})$ 为二阶特殊线性群.

在复分析中有如下一条十分重要的定理:

单值化定理(Poincaré-Koebe 定理) 任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一:单位圆,复平面 $\boldsymbol{C}$,扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$(即 Riemann 球面 S^2).

Riemann 曲面的意义将在下一章中叙述.由上述的结果及第 2 章 2.5 节中的定理 18,给出了上述三种域的自同构群,即定出了所有与单连通 Riemann 曲面一对一全纯等价的域的自同构群.在下一章中还将证明重要的 Riemann 映射定理:任意边界点至少有两点的单连通区域一定一对一地全纯等价于单位圆.故在一对一全纯等价的意义下,单连通区域只有这三个.至于这三个区域上的几何,将在第 5 章中讨论.

可以这样说:Poincaré-Koebe 单值化定理是复分析中最重要和最美好的定理之一.

3.4 Weierstrass 因子分解定理、Mittag-Leffler 定理与插值定理

在这一节中,将证明三个构造性定理.

由于整函数除了无穷远点外是全纯的,故可以用第 2 章 2.3 节中的 Taylor 级数(3.1)来表达.由 3.3 节,若 $z = \infty$ 为整函数的极点,则 $f(z)$ 就是一个多项式,因此整函数可以看成多项式的自然推广,是无穷多次阶的多项式(3.1).对于多项式,一个明确的表达式是用它的根(即零点)来表达.如 $a_1,\cdots,a_n$ 为 n 次多项式 $P_n(z)$ 的根,则 $P_n(z)$ 可以表为 $A(z-a_1)\cdots(z-a_n)$,这里,A 为复常数.这个表达式称为 $P_n(z)$ 的因子分解.对超越整函数,是否也可以因子分解,即如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为整函数的无穷多个零点,是否可将此函数表示为 $A(z-a_1)\cdots(z-a_n)\cdots = A\prod_{i=1}^{\infty}(z-a_i)$?由于乘积是无穷乘积,就有个收敛的问题,故不能这样简单地从事.这个问题的正确回答是 Weierstrass 因子分解定理.为此,先简单地讨论一下无

穷乘积.

对复数序列$\{u_n\}$ ($n=1,2,\cdots$),作乘积

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k),$$

若$1+u_k\neq 0$ ($k=1,2,\cdots$),有

$$\lim_{n\to\infty}p_n=p\neq 0,$$

且 p 为有限的,则称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{4.1}$$

是**收敛**的,且收敛到 p,记作 $p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$. 否则,称(4.1)式是**发散**的.

由于当 $x\geqslant 0$ 时 $1+x\leqslant e^x$,故

$$\begin{aligned}|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|&\leqslant(1+|u_1|)(1+|u_2|)\cdots(1+|u_n|)\\&\leqslant e^{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|},\end{aligned}$$

因此,$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ 同时收敛或同时发散.若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称(4.1)式绝对收敛.于是有:绝对收敛的无穷乘积一定收敛,且绝对收敛的无穷乘积可以改变因子的顺序而不影响无穷乘积的值.证明从略.

现在来讨论整函数的因子分解.

若整函数 $f(z)$ 无零点,则存在整函数 $\varphi(z)$,使得 $f(z)=e^{\varphi(z)}$.事实上,只要首先注意到函数 $f'(z)/f(z)$ 在整个平面上解析,它是一个整函数,则 $\psi(z)=\int_0^z\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta$ 也是整函数,而 $f(z)e^{-\psi(z)}$ 的复导数恒等于零.故 $f(z)=ce^{\psi(z)}=e^{\varphi(z)}$,其中,$c=f(0)\neq 0$ 是复常数,而 $\varphi(z)=\psi(z)+\ln c$ 是一个整函数.

若 $f(z)$ 是一个只有有限个零点的整函数,$0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ ($a_i\neq 0$ ($i=1,\cdots,n$)) 是 $f(z)$ 的零点,其级分别为 $m,m_1,\cdots,m_n$.令

$$p(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

则 $h(z)=\frac{f(z)}{p(z)}$ 以 $z=0,a_i$ ($i=1,\cdots,n$) 为可去奇点,故 $h(z)$ 为没有零点的整函数.于是 $h(z)=e^{\psi(z)}$,$\psi(z)$ 为整函数.因此,$f(z)$ 可表为

$$f(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}e^{\psi(z)},$$

即 $f(z)$ 可表为一个多项式及一个无零点的整函数的乘积,而此多项式以 $f(z)$ 的

零点为零点，且级相同.

若整函数 $f(z)$ 有无穷多个零点且不恒等于零，由于 $f(z)$ 的零点可列，可将 $f(z)$ 的零点按模的大小排列成一个序列（$z=0$ 除外，将另做处理）$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，则有

$$0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty. \tag{4.2}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，故对任意的正数 R，有数列 $k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots$，而 k_i 为正整数，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}$ 是收敛的. 这样的数列是存在的，例如取 $k_n=n-1$. 考虑无穷乘积

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\right\}. \tag{4.3}$$

记

$$P_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n},$$

$$Q_n(z)=\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z),$$

$$E_n(z)=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}=e^{Q_n(z)},$$

则(4.3)式即为 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}E_n(z)$.

对任意固定正数 R，取正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时 $|a_n|>2R$. 考虑无穷乘积 $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n(z)$，当 $|z|\leqslant R,n\geqslant N$ 时，$\left|\frac{z}{a_n}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，故

$$\begin{aligned}|Q_n(z)|&\leqslant\frac{1}{k_n+1}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n+1}+\frac{1}{k_n+2}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n+2}+\cdots\\&\leqslant\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{k_n+1}\frac{1}{1-\frac{|z|}{|a_n|}}\\&\leqslant2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}Q_n(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上绝对且一致收敛，故

$$\prod_{n=N}^{\infty}E_n(z)=\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}Q_n(z)\right)$$

在 $|z|\leqslant R$ 上一致收敛. 由 Weierstrass 定理（定理1），这个无穷乘积表示一个在

$|z|<R$ 上的全纯函数，且此函数不为零，而 $\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{N-1}E_n(z)$ 的零点为 a_n $(n=1,\cdots,N-1)$，且这些点都在 $|z|\leqslant 2R$ 之中. 因此，在 $|z|<R$ 中的那些 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{N-1}E_n(z)$ 的零点，且在 $|z|<R$ 中只有这些零点.

当 $|z|<R$，n 充分大时，可使 $|Q_n(z)|<1$. 易证 $|e^z-1|\leqslant\dfrac{7}{4}|z|$ 当 $|z|<1$ 时成立. 故

$$|E_n(z)-1|=|e^{Q_n(z)}-1|\leqslant\frac{7}{4}|Q_n(z)|\leqslant\frac{7}{2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n,$$

所以 $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n(z)$ 当 N 充分大时在 $|z|\leqslant R$ 上绝对收敛.

于是，对于已给的复数序列(4.2)，存在一个以 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其零点的整函数 $g(z)=\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{\infty}E_n(z)$，这个无穷乘积对 z 绝对收敛，且 $P_N(z)=\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{N}E_n(z)$ 在任意圆 $|z|<R$ 上一致收敛到 $g(z)$. 于是得到

定理 5(Weierstrass 因子分解定理) 若 $f(z)$ 为一整函数，$z=0$ 为 $f(z)$ 的 m 重零点(m 也可以为零)，其余零点为 $a_1,a_2,\cdots$ $(0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty)$. 若对任意的 $R>0$，有非负整数数列 $k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}$ 收敛，则 $f(z)$ 可表为

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)},\tag{4.4}$$

其中，$h(z)$ 为一整函数，$P_1(z)=1$，而

$$P_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\quad(n\geqslant 2).$$

显然，可取 $k_n=n-1$，则

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}.$$

证明 如前所述，可以作出整函数 $g(z)$，以 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其零点. 于是，$z^m g(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的零点及相同的级. 故 $0,a_i(i=1,2,\cdots)$ 为 $H(z)=\dfrac{f(z)}{z^m g(z)}$ 的可去奇点，且无零点，故 $H(z)=e^{h(z)}$，这里，$h(z)$ 为整函数. 定理得证.

由于 $g(z)$ 不唯一，故 $f(z)$ 的表达式也不唯一.

对于亚纯函数，可以有怎样的表达式？首先，从 Weierstrass 因子分解定理的证明中可得：

任意亚纯函数可以表为两个整函数之比.

证明　若 $f(z)$ 为亚纯函数，于是存在整函数 $f_1(z)$，它以 $f(z)$ 的极点为其零点. 令 $f_2(z) = f(z)f_1(z)$，在 $f(z)$ 的极点 a 处定义 $f_2(a) = \lim\limits_{z\to a} f_2(z)$，则 $f_2(z)$ 也是一个整函数，故 $f(z) = \dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$. 证毕.

由于任意亚纯函数可以表成两个整函数之比，而由 Weierstrass 因子分解定理，每个整函数可以表成(4.4)式的形式，故每个亚纯函数可表为两个形如(4.4)的式子的商. 这时，这个亚纯函数可以用它的零点及极点明确地表示.

此外，在上一节中已知，如果一个亚纯函数 $f(z)$ 只有有限多个极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，且 $z = \infty$ 是它的极点或可去奇点，则 $f(z)$ 为有理函数，并且有

$$f(z) = c + p(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z),$$

这里，c 为常数，$p(z)$ 为多项式，$\psi_j(z)$ 为极点 $z = a_j$ 的主要部分(定理 4).

对于一个超越亚纯函数 $f(z)$，$z = \infty$ 或是它的本性奇点，或是它的极点的极限点. 若 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 的极点仍为有限多个，故 $U(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j(z)$ 是一个超越整函数，因此

$$f(z) = U(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z).$$

若 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的极点的极限点，这些极点是 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 按模的大小排列起来，则有 $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. 在 a_j 点，其主要部分为 $\psi_j(z)$ 也是已给的. 是否存在亚纯函数 $f(z)$，以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为其极点，而以 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ 为相应的主要部分？于是有

定理 6(Mittag-Leffler 定理)　存在这样的亚纯函数，以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ($|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$) 为其极点，而以 $\psi_1(z), \psi_2(z), \cdots, \psi_n(z), \cdots$ 为相应的主要部分.

证明　在 a_i 点取小的邻域 $U_i (i = 1, 2, \cdots)$，使得 $U_i \cap U_j = \varnothing\ (i \neq j)$. 取 C^∞ 函数 φ_i，使得 $\varphi_i = 1$ 在 a_i 的一个小邻域 $V_i \subset U_i$ 中，$\varphi_i = 0$ 在 $U_i (i = 1, 2, \cdots)$ 的补集上. 于是在 $\mathbf{C} \backslash \{a_i (i = 1, 2, \cdots)\}$ 上定义 $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i \psi_i$，则 u 在 $\mathbf{C} \backslash \{a_i (i = 1, 2, \cdots)\}$ 上为 C^∞，且在 $V_i \backslash \{a_i\}$ 上的值为 ψ_i，即在 a_i 附近，有要求的

主要部分. 但 u 不是亚纯的. 令

$$A=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}, & \text{当 } z\in \mathbf{C}\setminus\{a_i(i=1,2,\cdots)\},\\ 0, & \text{当 } z=a_i(i=1,2,\cdots).\end{cases}$$

由于在 $V_i\setminus\{a_i\}$ 上 $u=\psi_i$, 故当 $z\neq a_i$ 时, $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}=0$, 即在 $V_i\setminus\{a_i\}$ 上, $A=0$. 而由 A 的定义, 当 $z=a_i$ 时, $A=0$, 故 A 为连续函数. 同理可证 A 为 C^∞ 函数. 适当地选取 $V_i(i=1,2,\cdots)$, 就可保证 $A=A(z)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上绝对可积. 于是由一维 $\bar\partial$- 问题的解(第 2 章 2.1 节定理 4 的推论 1), $\bar\partial$- 问题

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z}=A$$

在 $\mathbf{C}$ 上有 C^∞ 的解 v, 这可表为第 2 章 2.1 节中的公式(1.4). 于是, $f=u-v$ 即为所求的亚纯函数. 显然, 当 $z\in \mathbf{C}\setminus\{a_i(i=1,2,\cdots)\}$ 时, $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial \bar z}=0$, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=0$, 故当 $z\in\mathbf{C}\setminus\{a_i(i=1,2,\cdots)\}$ 时, f 是全纯的. 由于 $v\in C^\infty(\mathbf{C})$, 由 u 的定义, 当 z 取 a_i 附近的值时, f 有主要部分 $\psi_i(z)$. 定理证毕.

用 $\bar\partial$- 问题的解来证明 Mittag-Leffler 定理, 干净利索. 但如用古典复分析的办法来证, 可以将所得的亚纯函数写得更清楚.

定理 6′(Mittag-Leffler 定理) 设 $f(z)$ 为亚纯函数, $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的极点, 且 $|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, 则 $f(z)$ 可以写成

$$f(z)=U(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[\Psi_n(z)-P_n(z)],$$

这里, $\Psi_n(z)$ 为 $f(z)$ 在极点 $z=a_n$ 处的主要部分, $P_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为多项式, $U(z)$ 为整函数.

证明 取正数 $\varepsilon_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛. 若 $a_1=0$, 则取 $P_1(z)=0$. 对 $a_n(a_n\neq0)$, $\Psi_n(z)$ 是 $\dfrac{1}{z-a_n}$ 的多项式, 故在 $|z|<|a_n|$ 内全纯, 因此可展成 Taylor 级数

$$\Psi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k,$$

当 $|z|<|a_n|$ 时成立. 这个级数在 $|z|<\dfrac{1}{2}|a_n|$ 内一致收敛到 $\Psi_n(z)$, 故存在 λ_n, 使得

$$\left|\Psi_n(z)-\sum_{k=0}^{\lambda_n}\frac{\Psi_n{}^{(k)}(0)}{k!}z^k\right|<\varepsilon_n.$$

记 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{\lambda_n}\frac{\Psi_n{}^{(k)}(0)}{k!}z^k$. 设 R 为任意正数，取正整数 $N=N(R)$，使得当 $n>N$ 时，$|a_n|>2R$；当 $n\leqslant N$ 时，$|a_n|\leqslant 2R$. 于是，当 $n>N$，$|z|<R$ （$|z|<\frac{1}{2}|a_n|$）时

$$|\Psi_n(z)-P_n(z)|<\varepsilon_n.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛，故 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_z(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上一致收敛. 当 $n>N$ 时，$\Psi_n(z)$ 的极点 $z=a_n$ 不在 $|z|<R$ 内，故由 Weierstrass 定理(定理 1)，$\Phi_N(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上全纯. 于是 $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}+\Phi_N(z)$ 在 $|z|<R$ 内，以满足 $|a_n|<R$ 的那些 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 点为极点，其主要部分是 $\Psi_n(z)$. 由于 R 是任意的，故 $\varphi(z)$ 即为以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为极点，以 $\Psi_1(z),\Psi_2(z),\cdots,\Psi_n(z),\cdots$ 为其相应主要部分的亚纯函数. 定义 $U(z)=f(z)-\varphi(z)$，$U(a_n)=\lim_{z\to a_n}\{f(z)-\varphi(z)\}$，则 $U(z)$ 为一整函数. 定理得证.

若已给 m 个点 $z_1,\cdots,z_m$ 及 m 个复数值 $a_1,\cdots,a_m$，一定可以找到一个多项式 $p(z)$，使得 $p(z)$ 在 z_j 的值等于 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$. 这只要从 m 个方程 $p(z_j)=a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 中解出 $p(z)$ 的系数来即可. 同样，若已给 m 个点 $z_1,\cdots,z_m$ 及复数值 $a_{j,k}(j=1,\cdots,m;0\leqslant k\leqslant n_j-1)$，这里 n_j 为正整数，则可以找到多项式 $p(z)$，使得 $\frac{p^{(k)}(z_j)}{k!}=a_{j,k}$，也就是可以找到多项式 $p(z)$，使得 $p(z)$ 在点 z_j 上的 Taylor 展开式的开始 n_j 项是所给定的多项式. 下面证明一个十分一般的插值(interpolation)定理.

定理 7(插值定理) 若 $z_1,z_2,\cdots$ 为 $\boldsymbol{C}$ 中的一个离散点集，$n_1,n_2,\cdots$ 为一个正整数序列，$a_{j,k}(j\geqslant 1;0\leqslant k\leqslant n_j-1)$ 为复数序列，则一定存在一个整函数 $g(z)$，使得

$$g^{(k)}(z_j)=k!a_{j,k}\quad(j\geqslant 1;0\leqslant k\leqslant n_j-1)$$

成立. 即：如果预先给定一个点列 $\{z_j\}$ 及每一点 z_j 上的 Taylor 展开式的开始 n_j 项，则一定存在一个整函数，在这些点上，有这样的 Taylor 展开式.

证明 由定理 5(Weierstrass 因子分解定理)，可以找到整函数 $f(z)$，使得 $f(z)$ 在 $z=z_j$ 处为 n_j 重零点. 由于 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 为一个离散序列，故可以找到

正数序列 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$，使得以 z_j 为中心，$2\varepsilon_j$ 为半径的圆 $D(z_j,2\varepsilon_j)$ 相互之间不相交．作

$$P_j(z)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n_j-1}a_{j,k}(z-z_j)^k\quad(j\geqslant 1).$$

对每个 j，作 $\varphi_j\in C^\infty$，使得 φ_j 的支集在 $D(z_j,2\varepsilon_j)$ 之中，且 $0\leqslant\varphi_j\leqslant 1$，而在 $\overline{D}(z_j,\varepsilon_j)$ 上 $\varphi_j\equiv 1\ (j=1,2,\cdots)$.

令 $\psi(z)\in C^\infty$，作函数

$$g(z)=\sum_{j\geqslant 1}P_j(z)\varphi_j(z)-f(z)\psi(z). \tag{4.5}$$

由于 φ_j 的支集在 $\boldsymbol{C}$ 上互不相交，故对每一点 $z\in\boldsymbol{C}$，$\sum\limits_{j\geqslant 1}P_j(z)\varphi_j(z)$ 中最多只有一项不为零，故这个和式是有意义的．我们要求出 ψ，使得 $g(z)$ 是一个整函数，即要求 $\dfrac{\partial g}{\partial\bar z}=0$．当 $z\in\boldsymbol{C}$ 时，此即

$$\sum_{j\geqslant 1}P_j(z)\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\bar z}=f(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}.$$

令 $h(z)=\sum\limits_{j\geqslant 1}P_j(z)\dfrac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\bar z}$，则在 $\bigcup\limits_j\overline{D}(z_j,\varepsilon_j)$ 上 $h(z)\equiv 0$．在 $z=z_j$ 处，取 $\dfrac{h(z)}{f(z)}=0$，则 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上是 C^∞ 的．h 有互不相交的紧致支集，故由第 2 章 2.1 节定理 4，$\bar\partial$- 问题 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar z}=\dfrac{h}{f}$ 有一个 C^∞ 的解 ψ．取这样的 ψ，则(4.5)式定义了一个整函数，在 $\bigcup\limits_j\overline{D}(z_j,\varepsilon_j)$ 上，$\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar z}=0$，故 ψ 在 z_j 的附近是全纯的．由于 $f(z)$ 在 $z=z_j$ 处有 n_j 重零点，故由(4.5)式所定义的 $g(z)$，可以直接计算验证：当 $0\leqslant k\leqslant n_j-1$ 时

$$g^{(k)}(z_j)=P_j^{(k)}(z_j)=k!\,a_{j,k}$$

成立，故定理得证．

任给一个幂级数，未必能找到一个整函数，它的 Taylor 级数就是已给的幂级数．但定理 7 告诉我们，任给一个 n 次多项式，不论 n 多大(要紧的是 n 有限)，一定能找到一个整函数，它的 Taylor 级数的开始 n 次多项式就是已给的这 n 次多项式．这显示了多项式与整函数之间的根本差别．因此，定理 7 是一条很深刻的定理．

3.5 留数定理

若函数 $f(z)$ 在 $D(a,r)\setminus\{a\}$ $(r>0)$ 上全纯，a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在点 a 的留数定义为

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz,$$

这里，$0<\rho<r$. 由于 $f(z)$ 在 $D(a,r)\setminus\{a\}$ 上可展开成 Laurent 级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$，故 $\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}$.

若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 内全纯，定义 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数为

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz,$$

这里，$R<\rho<\infty$. 由于 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内可展开成 Laurent 级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，故 $\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}$.

若 a $(a\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的 m $(m\geqslant 1)$ 级极点，于是 $f(z)$ 在 a 的邻域内可写成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z),$$

而 $g(z)$ 在 $z=a$ 处全纯，且 $g(a)\neq 0$，故

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

因此

$$\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a),$$

而

$$g^{(m-1)}(a)=\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^mf(z)],$$

故

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

特别地,当 $m = 1$ 时

$$\mathrm{Res}(f,a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

有如下的

定理 8(留数定理) 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上除去 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 之外是全纯的,且 $f(z)$ 在 $\overline{U}$ 上除去 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 之外是连续的,∂U 为可求长简单闭曲线,则

$$\int_{\partial U} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

定理 8′(留数定理) 若 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{C}^*$ 上除去 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$ 之外是全纯的,$z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点,则 $f(z)$ 在所有这些孤立奇点的留数之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 0.$$

这两条定理的证明是显然的,只要用 Cauchy 积分定理,立即可得.证明从略.

留数定理本身是十分简单的,重要的是可以用它来计算一些定积分的值,而这些定积分的被积函数的原函数往往是求不出来的.用留数定理求定积分有种种技巧,如函数 $f(z)$ 的选取,积分路线的选取等等.在这里只举六个简单的例子来说明.

例 1 计算积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$,$n$ 为正整数.

解 取 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$,则 $f(z)$ 在上半平面中有唯一孤立奇点 $z = \mathrm{i}$,它为 $n+1$ 级极点.取 U 为上半圆 $|z| < R, \mathrm{Im}\, z > 0$(见图 3.2).于是

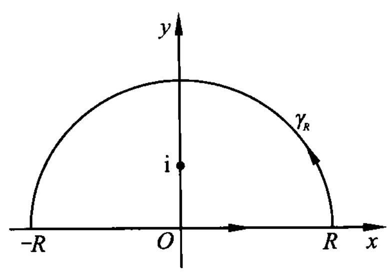


图 3.2

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) &= \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left\{\frac{(z-\mathrm{i})^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=\mathrm{i}}\\ &= \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left\{\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=\mathrm{i}}\\ &= \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2\mathrm{i})^{2n+1}}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}},\end{aligned} \tag{5.1}$$

这里，γ_R 为上半圆周(见图 3.2)：$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 但

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^{n+1}},$$

当 $R\to\infty$ 时，显然这个积分趋于零. 因此，在(5.1) 式中令 $R\to\infty$，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

例 2　计算积分(Dirichlet 积分) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

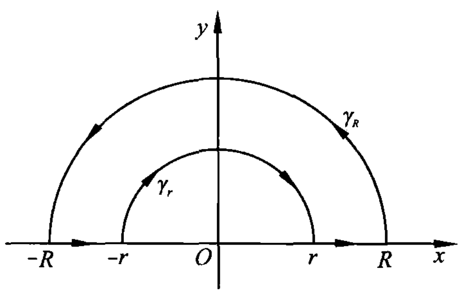


图 3.3

解　显然 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

考虑 $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$，取 U 为上半平面的半个圆环(见图 3.3)，其边界为：

$-R < z < -r$;

$r < z < R$;

γ_r: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$;

γ_R: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

由于 $f(z)$ 在这个半圆环中全纯，由 Cauchy 积分定理，有

$$\int_r^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{-R}^{-r}f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r}f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

而

$$\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-R\sin\theta+\mathrm{i}R\cos\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$$

但当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}\theta\leqslant\sin\theta$，故

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta\right| \leqslant \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta\right| = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}),$$

当 $R\to\infty$ 时,这是趋于零的.因此,当 $R\to\infty$ 时,$\int_{\gamma_R} f(z)dz\to 0$.

另一方面

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = i\int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\theta+ir\cos\theta}d\theta = i\int_{\pi}^{0}(1+O(r))d\theta = -\pi i + O(r),$$

故当 $r\to 0$ 时,$\int_{\gamma_r} f(z)dz\to -\pi i$.而

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}dx,$$

于是在

$$\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

中,令 $r\to 0, R\to\infty$,即得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 3 计算$\int_0^{\infty}\cos x^2 dx$ 及$\int_0^{\infty}\sin x^2 dx$.

解 取 $f(z)=e^{iz^2}$,取 U 为由 Ⅰ:$0\leqslant z\leqslant R$;Ⅱ:$re^{i\frac{\pi}{4}}(0\leqslant r\leqslant R)$ 及 γ_R:$Re^{i\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$所围成的扇形区域(图 3.4).于是由 Cauchy 积分定理,得

$$\int_{\mathrm{I}} f(z)dz + \int_{\mathrm{II}} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

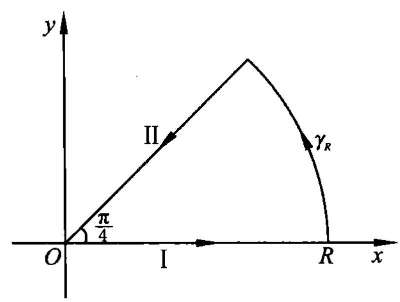


图 3.4

而

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin2\theta}d\theta$$

$$\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}).$$

当 $R\to\infty$ 时,上式右边趋于零,故

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{II}} f(z)\mathrm{d}z\right)=0,$$

即

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}\mathrm{d}r=0.$$

这就有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

但已知$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,因此$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$.于是

$$\int_0^\infty \cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^\infty \sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

例 4　计算积分$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$,这里,$R(\xi,\eta)$是$\xi,\eta$的有理函数,且$R(\cos\theta,\sin\theta)$在$[0,2\pi]$上连续.

解　对于这样的积分,可以化为单位圆周上的积分.令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,由第1章(6.1)式,得$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$,$\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$,$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$,于是

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},$$

则$F(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)$是$z$的有理函数.若$z_1,z_2,\cdots,z_n$是上述函数在圆$|z|<1$内的极点,那么

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F(z),z_k).\tag{5.1}$$

例如,计算积分$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta\ (a>b>0)$.

令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则上述积分等于

$$\frac{\mathrm{i}}{2b}\int_{|z|=1}F(z)\mathrm{d}z,$$

这里

$$F(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z^2+\frac{2az}{b}+1\right)}=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)},$$

而

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},\quad \beta=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

是方程 $z^2+\frac{2a}{b}z+1=0$ 的两个根.显然,$z=0$ 与 $z=\alpha$ 是 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内的两个孤立奇点,它们分别是 $F(z)$ 的 2 阶极点和 1 阶极点.不难求出 $F(z)$ 在 $z=0$ 与 $z=\alpha$ 的留数分别为

$$\mathrm{Res}(F(z),0)=\alpha+\beta,\quad \mathrm{Res}(F(z),\alpha)=\alpha-\beta.$$

于是,由(5.1)式得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2b}[\mathrm{Res}(F(z),0)+\mathrm{Res}(F(z),\alpha)]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{2b}\cdot 2\alpha\\&=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).\end{aligned}$$

用类似的方法也可以计算形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos n\theta,\sin n\theta)\mathrm{d}\theta$, $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta$ 以及 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$ 等等的积分,这里,R 表示有理函数.

更一般地,还有一些类型的实的定积分,可以利用围道积分来求留数的方法得到其答案.例如以下一些类型:$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos ax\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin ax\mathrm{d}x$ $(a>0)$.等等.当然,对这些积分中的 $f(x)$ 一定要有所要求,对不同类型的积分,要选取好各种不同的合适的围道积分,这就需要高明的技巧.本书不拟对各种类型的实定积分进行一一的讨论与举例,因为这要占用不少篇幅,好在在一般的教科书上都能找到.在这里只打算再举下列两个例子.

例 5 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}\mathrm{d}x$ $(0<\alpha+1<\beta)$.

解 取 $f(z)=\frac{z^{\alpha}}{1+z^{\beta}}$,并取 $-\pi\leqslant\arg z<\pi$,则 $f(z)$ 是多值函数的主值分支.在除去 $1+z^{\beta}=0$ 的解的那些点外,$f(z)$ 在复平面上是全纯的.

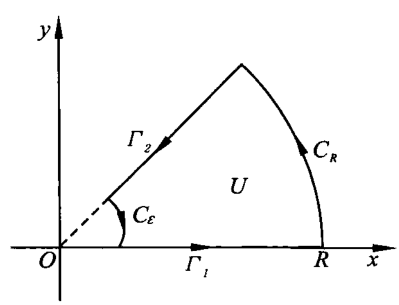


图 3.5

再取 $0<\varepsilon<1<R$.域 U(见图 3.5)是由曲线 Γ_1: $\varepsilon\leqslant z=x\leqslant R$, Γ_2: $re^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\beta}}(\varepsilon\leqslant r\leqslant$

R), C_R: $Re^{i\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{\beta}\right)$和$C_\varepsilon$: $\varepsilon e^{i\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{\beta}\right)$所围成的. 显然,在 U 中只有 $z=e^{i\frac{\pi}{\beta}}$ 是奇点. 于是,由留数定理得

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{C_R} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz+\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),e^{i\frac{\pi}{\beta}}).$$

上述各个曲线积分的取向见图 3.5. 当 $\varepsilon\to 0, R\to 0$ 时

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz=\int_\varepsilon^R \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx\to\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx,$$

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{R^\alpha e^{i\alpha\theta}}{1+R^\beta e^{i\beta\theta}}Ri\,e^{i\theta}d\theta\to 0,$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz=\int_R^\varepsilon \frac{r^\alpha e^{i\frac{2\alpha\pi}{\beta}}}{1+r^\beta}re^{i\frac{2\pi}{\beta}}dr\to -e^{i\frac{2(\alpha+1)\pi}{\beta}}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx,$$

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=\int_{\frac{2\pi}{\beta}}^0 \frac{\varepsilon^\alpha e^{i\alpha\theta}}{1+\varepsilon^\beta e^{i\beta\theta}}\varepsilon i\,e^{i\theta}d\theta\to 0.$$

易见

$$\mathrm{Res}(f(z),e^{i\frac{\pi}{\beta}})=-\frac{1}{\beta}e^{i\frac{(\alpha+1)\pi}{\beta}}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx=\frac{\pi}{\beta\sin\frac{(\alpha+1)\pi}{\beta}}.$$

例 6　求证

$$I=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{\cosh\pi x}dx=\frac{1}{\cosh\pi\xi}.$$

也就是说,$\frac{1}{\cosh\pi x}$ 的 Fourier 变换依然是它自己.

证明　固定 $\xi\in\mathbf{R}$. 令 $I_R=\int_{\partial U_R} f(z)dz$, 这里, $f(z)=\frac{e^{-2\pi iz\xi}}{\cosh\pi z}$. $f(z)$ 的分母为零,当且仅当 $e^{\pi z}=e^{-\pi z}$,即 $e^{2\pi z}=-1$. 而 U_R 为矩形,如图 3.6 所示,它的四边分别为: x 轴,从 $-R$ 到 R; 与 x 轴相平行的线段,从 $R+2i$ 到 $-R+2i$; 线段,从 R 到 $R+2i$; 以及线段,从 $-R+2i$ 到 $-R$.

$f(z)$ 在 U_R 中只有两个单极点,即 $\alpha=\frac{i}{2}$, $\beta=\frac{3i}{2}$. 现在求 f 在点 α 处的留数. 由于

$$(z-\alpha)f(z)=e^{-2\pi iz\xi}\frac{2(z-\alpha)}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}=2e^{-2\pi iz\xi}e^{\pi z}\frac{z-\alpha}{e^{2\pi z}-e^{2\pi\alpha}},$$

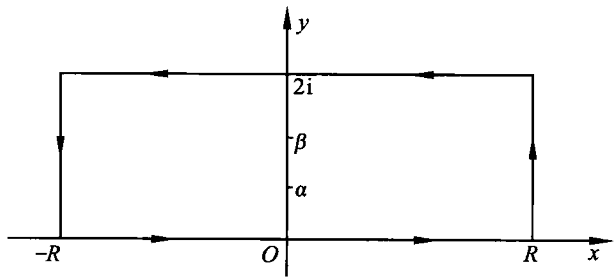


图 3.6

因此

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = 2e^{-2\pi i\alpha\xi}e^{\pi\alpha}\frac{1}{2\pi e^{2\pi\alpha}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}.$$

于是

$$\mathrm{Res}(f(z),\alpha) = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}.$$

同样可得

$$\mathrm{Res}(f(z),\beta) = -\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}.$$

在边 $z = R + iy\ (0\leqslant y\leqslant 2)$ 上,有

$$|e^{-2\pi iz\xi}|\leqslant e^{4\pi|\xi|}.$$

而当 $R\to\infty$ 时

$$|\cosh\pi z| = \left|\frac{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left||e^{\pi z}|-|e^{-\pi z}|\right| \geqslant \frac{1}{2}(e^{\pi R}-e^{-\pi R})\to\infty.$$

因此,在 I_R 中,$f(z)$ 在 $R+iy\ (0\leqslant y\leqslant 2)$ 上的积分,当 $R\to\infty$ 时是趋于零的. 同样,$f(z)$ 在 $-R+iy\ (0\leqslant y\leqslant 2)$ 上的积分,当 $R\to\infty$ 时也是趋于零的. $f(z)$ 在 x 轴上由 $-R$ 到 R 的积分,当 $R\to\infty$ 时趋于 I. 而 $f(z)$ 在与 x 轴相平行的线段 $x+2i\ (-R\leqslant x\leqslant R)$ 上的积分,由于 $\cosh\pi\xi$ 的周期是 πi,故当 $R\to\infty$ 时,这个积分趋于 $-e^{4\pi\xi}I$. 于是,当 $R\to\infty$ 时

$$I_R\to I-e^{4\pi\xi}I.$$

由留数定理可知

$$I-e^{4\pi\xi}I = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}-\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right) = -2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}).$$

由于 $1-e^{4\pi\xi}=-e^{2\pi\xi}(e^{2\pi\xi}-e^{-2\pi\xi})$,故

$$I=2\frac{e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi}}{e^{2\pi\xi}-e^{-2\pi\xi}}=\frac{2}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}}=\frac{1}{\cosh\pi\xi}.$$

这就完成了证明.

3.6 解析开拓

若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上全纯.如果存在一个包含 U 的域G,有函数 $F(z)$ 在 G 上全纯,且在 U 上$F(z)=f(z)$,则称 $f(z)$ 可解析开拓(或全纯开拓)到 $G\setminus U$.由全纯函数的唯一性定理,如果在 G 内F 存在,则是唯一的.同样,如果 $f_1(z),f_2(z)$ 分别在域 U_1,U_2 上全纯,且 $U_1\cap U_2=U_3\neq\varnothing$,而在 U_3 上 $f_1=f_2$,则在 $U=U_1\cup U_2$ (图 3.7) 上定义

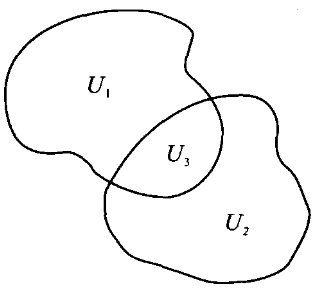


图 3.7

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & 当\ z\in U_1,\\ f_2(z), & 当\ z\in U_2.\end{cases}$$

于是 f 在U 上全纯,称 f_1,f_2 **互为解析开拓**.

最自然、最重要的解析开拓的方法是用幂级数来进行解析开拓.由 Abel 定理(第 1 章 1.5 节定理 3),一个幂级数

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{6.1}$$

存在一个收敛半径R,在 $|z|<R$ 内级数绝对收敛且内闭一致收敛.故这是一个全纯函数,记作 $f(z)$.如果 $z_0\in D(0,R)$,则 $f(z)$ 可以在 $z=z_0$ 处展开成 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

若其收敛半径为 ρ,则 $\rho\geqslant R-|z_0|$.如果 $\rho>R-|z_0|$,则 $D(z_0,\rho)$ 有一部分在 $D(0,R)$ 之外,于是 $f(z)$ 可以解析开拓到 $D(z_0,\rho)\setminus D(0,R)$ 上去.若 $\rho=R-|z_0|$,则$D(z_0,\rho)$与$D(0,R)$相切,设其切点为 ζ_0.这表明$f(z)$不能于 ζ_0 处解析开拓出去,称 ζ_0 为 $f(z)$ 的一个奇点. 显然,如果 R 是级数(6.1) 的收敛半径,则级数(6.1) 一定在 $|z|=R$ 上至少有$f(z)$ 的一个奇点.如不然,则 $f(z)$ 可以在

$|z|=R$ 上任一点解析开拓出去,即对于 $|z|=R$ 上任一点 ζ,都有 $D(\zeta,r_\zeta)$ 及 $g_\zeta(z)$,而 $g_\zeta(z)$ 在 $D(\zeta,r_\zeta)$ 上全纯,且当 $z\in D(0,R)\cap D(\zeta,r_\zeta)$ 时 $g_\zeta(z)=f(z)$. 由于 $|z|=R$ 为紧的,故由 Heine-Borel 定理,在$\{D(\zeta,r_\zeta)\}$ 中可选取有限个 $D(\zeta_1,r_{\zeta_1}),D(\zeta_2,r_{\zeta_2}),\cdots,D(\zeta_m,r_{\zeta_m})$ 覆盖 $|z|=R$. 令 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m}D(\zeta_k,r_{\zeta_k})$, ρ 为 $|z|=R$ 到 ∂G 的距离,显然 $\rho>0$. 于是,$\{R-\rho<|z|<R+\rho\}\subset G$. 在 G 内定义 $\Phi(z)=g_{\zeta_k}(z)\ (z\in D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\ (k=1,2,\cdots,m))$,则 $\Phi(z)$ 为 G 上的单值全纯函数. 如 $D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l})\neq\varnothing\ (k\neq l)$,则 $(D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l}))\cap D(0,R)\neq\varnothing$,在这部分,$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z)=f(z)$. 由全纯函数的唯一性定理,在 $D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l})$ 上,$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z)$. 在 $G\cap D(0,R)$ 上,$\Phi(z)=f(z)$,故 $f(z)$ 可解析开拓到 $G\cup D$. 而这包含 $D(0,R+\rho)$,这与 R 为级数(6.1) 的收敛半径的定义相矛盾.

因此,在收敛圆周上,级数(6.1) 一定有奇点. 例如,$\sum\limits_{n=0}^{N}z^n$ 在 $z=1$ 处有奇点. 下面这个著名的例子说明有这样的幂级数,它的收敛圆周上每一点都是奇点.

例 设

$$f(z)=z^{1!}+z^{2!}+\cdots+z^{n!}+\cdots, \tag{6.2}$$

证明 $f(z)$ 的收敛圆周上的每一点都是奇点.

证明 由于

$$a_n=\begin{cases}1, & 若\ n=k!,\\ 0, & 若\ n\neq k!,\end{cases}$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

因此,级数(6.2) 的收敛半径为 $R=1$,即 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯. 若 $z_0\in D(0,1)$, $|z_0|=\frac{1}{2}$,则 $f(z)$ 在 z_0 处有 Taylor 展开式

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

延长 Oz_0 与 $|z|=1$ 的交点为 ζ_0,如能证明 $g(z)$ 的收敛半径为$\frac{1}{2}$,则表明 $f(z)$ 不能在 ζ_0 处解析开拓. 如不然,即若 $g(z)$ 的收敛半径 $\rho>\frac{1}{2}$,则 $D(\zeta_0,\rho)\cap D(0,1)\neq\varnothing$,于是在 $D(\zeta_0,\rho)$ 中有 $|z|=1$ 的一段圆弧 σ,且 $\zeta_0\in\sigma$. 由于形如 $\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}p}{q}\right)$ $\left(p,q\ 为整数,\frac{p}{q}\ 为既约分数\right)$的点在 $|z|=1$ 上处处稠密,故在 σ 上

一定有点 $\zeta_1 = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} p}{q}\right)$，而$\lim\limits_{r\to1}(r\zeta_1) = g(\zeta_1)$ $(0<r<1)$．但当 $z \in D(0,1)$ 时，$g(z) = f(z)$，故$\lim\limits_{r\to1}f(r\zeta_1) = g(\zeta_1)$．由于

$$f(r\zeta_1) = \sum_{n=1}^{q-1} r^{n!}\zeta_1{}^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

显然

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > \sum_{n=q}^{N} r^{n!} > (N-q)r^{N!}.$$

于是当 $r\to1$ 时，$\sum\limits_{n=q}^{\infty} r^{n!}$ 可以大于任何正整数，故$\lim\limits_{r\to1}|f(r\zeta_1)| = \infty$，这与$\lim\limits_{r\to1}f(r\zeta_1) = g(\zeta_1)$ 相矛盾．故 ζ_0 为 $f(z)$ 的奇点．

一个函数称为在一点 z_0 附近是解析的(或全纯的)，如果这个函数在这个点附近可以展开成收敛幂级数，这是函数局部解析(或局部全纯)的定义．这个定义与第 1 章中 1.3 节中的定义是一致的．有了解析开拓的概念后，可以定义整体解析(或整体全纯)函数．

从一个局部全纯函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 出发，如其收敛半径为 R，若 $a_1 \in D(a,R)$，则得另一个幂级数

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n,$$

其收敛半径为 $R_1 \geqslant R - |a-a_1| > 0$．称全纯函数 $f(z)$，$f_1(z)$ 为解析元素，而 $f_1(z)$ 为 $f(z)$ 的解析开拓．如有 m 个解析元素$f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)}(z-a_k)^n (k=1,2,\cdots,m)$，$f_k$ 是f_{k-1} 的解析开拓，则 f_m 也是f 的解析开拓．将所有由 $f(z)$ 出发的解析开拓得到的解析元素的全体组成一个集合，这个集合称为整体解析(整体全纯)函数(global analytic function)．

完全解析(完全全纯)函数(complete analytic function)是一个整体解析函数包含有其中任何一个解析元素的所有解析开拓．一般来说，这是一个多值函数．所有解析开拓所对应的收敛圆之和称为完全解析函数的存在域．这当然不能再开拓出去．因此，存在域的边界点都是完全解析函数的奇点．

习　题　3

1. 若 $a_1, a_2, \cdots$ 为互不相同的点列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. 若

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{n,j}}{(z-a_n)^j} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

在 $\boldsymbol{C}$ 内除了 a_n 之外的其他点处都全纯，则存在 $\boldsymbol{C} \setminus \{a_1, a_2, \cdots\}$ 上的全纯函数 $f(z)$，使得 $f(z)$ 在每个 $a_n (n = 1,2,\cdots)$ 处的 Laurent 展开式的主要部分为 $\psi_n(z)$.

2. 证明定理 8 及定理 8′.

3. 将下列函数在指定的区域内展开成 Laurent 级数：

(ⅰ) $\dfrac{1}{z^3(z+\mathrm{i})}$, $0 < |z+\mathrm{i}| < 1$;

(ⅱ) $\dfrac{z^2}{(z+1)(z+2)}$, $1 < |z| < 2$;

(ⅲ) $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$, $\max(|a|, |b|) < |z| < +\infty$;

(ⅳ) $z^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, $0 < |z| < +\infty$;

(ⅴ) $\sin\dfrac{z}{1+z}$, $0 < |z+1| < +\infty$.

4. 下列函数有哪类奇点?若是极点，求其级：

(ⅰ) $\dfrac{\sin z}{z}$;　　(ⅱ) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$;　　(ⅲ) $z(\mathrm{e}^{1/z}-1)$;

(ⅳ) $\sin\dfrac{1}{1-z}$;　　(ⅴ) $\dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)}{\mathrm{e}^z-1}$;　　(ⅵ) $\tan z$.

5. 证明：(1) 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点，且 $f(z) \neq 0$，则 a 也是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

(2) 若 a 是 $f(z)$ 是本性奇点，且 $P(\zeta)$ 是非常数多项式，则 a 也是 $P(f(z))$ 的本性奇点.

6. 证明：

（ⅰ）$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\dfrac{1}{1-z}$　$(|z|<1)$；

（ⅱ）$\sinh\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z^2}{n^2}\right)$；

（ⅲ）$\cos\pi z=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\left(\dfrac{z}{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right]$；

（ⅳ）$e^z-1=ze^{z/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{4\pi^2n^2}\right)$.

7.（**Blaschke乘积**）设复数序列$\{a_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$满足$0<|a_k|<1$，$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<\infty$，证明无穷乘积

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-z}{1-\overline{a}_kz}\cdot\frac{|a_k|}{a_k}\right)$$

在圆$|z|\leqslant r$ $(0<r<1)$上一致收敛，因而$f(z)$在$|z|<1$内全纯，$f(z)$以a_k $(k=1,2,\cdots)$为零点，且没有别的零点，$|f(z)|\leqslant 1$.

8.（**Poisson-Jensen公式**）设$f(z)$是圆$|z|\leqslant R$ $(0<R<\infty)$上不恒为零的亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots,a_s$和$b_1,b_2,\cdots,b_t$分别是它在圆$|z|<R$内的零点和极点，若a是一个n级零点，则a在$a_1,\cdots,a_s$中出现n次，对极点做同样的规定.对圆$|z|<R$内任一异于$a_i(i=1,\cdots,s)$与$b_j(j=1,\cdots,t)$的点z，则有公式

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\operatorname{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi+\sum_{j=1}^{t}\ln\left|\frac{R^2-\overline{b}_jz}{R(z-b_j)}\right|-\sum_{i=1}^{s}\ln\left|\frac{R^2-\overline{a}_iz}{R(z-a_i)}\right|$$

成立.这个公式是值分布论Nevanlinna理论的出发点.

9. 设亚纯函数$f(z)$在扩充复平面C^*上只有两个极点.$z=-1$是它的一级极点，其主要部分是$\dfrac{1}{z+1}$；$z=2$是它的二级极点，其主要部分是$\dfrac{2}{z-2}+\dfrac{3}{(z-2)^2}$；且$f(0)=\dfrac{7}{4}$.求$f(z)$在$1<|z|<2$上的Laurent展开式.

10. 已知亚纯函数$f(z)$在$z=1,2,3,\cdots$有二级极点，且$f(z)$在点$z=n$的邻域内，其Laurent展开式的主要部分为$\psi_n(z)=\dfrac{n}{(z-n)^2}$ $(n=1,2,\cdots)$.求

$f(z)$ 的一般形式.

11. (1) 将 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ 展成部分分式.

(2) 证明：$\dfrac{1}{\sin^2\pi z}=\dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(z-n)^2}$.

(3) 证明：若 $\alpha\neq 0,\beta/\alpha\neq\pm 1,\pm 2,\cdots$，则

$$\frac{\pi}{\alpha}\cot\frac{\pi\beta}{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n\alpha+\beta}-\frac{1}{n\alpha+\alpha-\beta}\right),$$

并由此证明

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}+\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

12. 设亚纯函数 $f(z)$ 只有有限多个极点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，并且 $\alpha_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 都不是整数，$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $p\ (p\geqslant 2)$ 级零点. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}f(k)=-\pi\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z,\alpha_k)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k)=-\pi\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\dfrac{f(z)}{\sin\pi z},\alpha_k\right)$.

(3) 利用(1),(2) 求下列级数的和：

(i) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n)^2}$ （a 不是整数）;

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+a^2}$ （a 是不为零的实数）.

13. 求下列函数在孤立奇点(包括无穷远点，如果它是孤立奇点)处的留数：

(i) $\dfrac{1}{z^2-z^4}$;　　(ii) $\dfrac{z^2+z+2}{z(z^2+1)^2}$;　　(iii) $\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$ （$a\neq 0,n$ 为正整数）;

(iv) $\dfrac{1}{\sin z}$;　　(v) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$;　　(vi) $\dfrac{e^z}{z(z+1)}$.

14. 若函数 $f(z),g(z)$ 在 $z=a$ 处是全纯的，$f(a)\neq 0$，$z=a$ 处是 $g(z)$ 的二级零点，求 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{f(z)}{g(z)},a\right)$.

15. 计算下列积分：

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$;　　(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$ （$a>0$）;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$;　　(iv) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$;

(ⅴ) $\int_0^\infty \frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<2)$； (ⅵ) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \quad (n\geqslant 2, n$ 为整数)；

(ⅶ) $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$； (ⅷ) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>1, a$ 为常数)；

(ⅸ) $\int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+2x\cos\lambda+1}\mathrm{d}x \quad (-1<p<1, -\pi<\lambda<\pi)$；

(ⅹ) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x \quad (p>1)$； (ⅺ) $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (-1<p<2)$；

(ⅻ) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$； (xiii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(xiv) $\int_0^\infty \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}\mathrm{d}x$； (xv) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x$；

(xvi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\theta\mathrm{d}\theta$； (xvii) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$；

(xviii) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

16. 说明级数 $-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以开拓为 $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$ 在 $|z|>1$ 内所定义的函数.

17. 证明由级数

$$1+\alpha z+\alpha^2z^2+\cdots+\alpha^nz^n+\cdots$$

与

$$\frac{1}{1-z}-\frac{(1-\alpha)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-\alpha)^2z^2}{(1-z)^3}-\cdots$$

定义的函数互为解析开拓.

18. 证明级数

$$z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots$$

在 $|z|<1$ 中所定义的函数 $f_1(z)$ 与级数

$$\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

在 $|z-1|<2$ 中所定义的函数 $f_2(z)$ 互为解析开拓.

19. 证明幂级数 $\sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$ 不能解析开拓到它的收敛圆外.

第 4 章 Riemann 映射定理

4.1 共形映射

复变函数论的另一个重要组成部分是 Riemann 共形映射理论. 这个理论的基本观点是将全纯函数 $w = f(z)$ 看做从 z 平面上的区域到 w 平面上的区域的映射. 也就是说,从几何的观点来看待与处理全纯函数. 在第 1 章 1.3 节中已经提到,若 $f'(z) \neq 0$,则 $w = f(z)$ 看做一个映射时有共形性,故称之为共形映射,或全纯映射.

首先看到这样一件事实:若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为域,经过全纯映射 $w = f(z)$ 后得到 $f(U)$,则 $f(U)$ 仍是一个域.

这只要证明 $f(U)$ 为连通开集. 若 w_1, w_2 为 $f(U)$ 中任意两点,在 U 内有 z_1, z_2,使得 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$. 因为 U 为连通的,故在 U 中有 $\gamma(t)$ 连接 z_1 和 z_2,而显然 $f(\gamma(t)) \subset f(U)$ 连接 w_1 和 w_2. 故 $f(U)$ 为连通的.

设 w_0 是 $f(U)$ 中任一点. 由第 2 章 2.4 节定理 15,对于充分小的 $\rho > 0$,存在 $\delta > 0$,使得 $D(w_0, \delta)$ 内任一点 w,在 $D(z_0, \rho)$ 内存在一点 z,使得 $f(z) = w$,即 $D(w_0, \delta) \subset f(U)$,故 $f(U)$ 为开集. 上述结果也称**开映射**(open mapping) 定理:f 将开集映为开集.

在第 1 章 1.6 节中已经定义,在域 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上定义的函数 $f(z)$ 称为**单叶**(univalent) 的,如果 $f(z_1) = f(z_2)$ 当且仅当 $z_1 = z_2$. 于是可有如下的结果:

若 $f(z)$ 在域 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上单叶且全纯,则对任一点 $z \in U$,有 $f'(z) \neq 0$. 反之,若在点 $z_0 \in U$, $f'(z_0) \neq 0$,则在点 z_0 的一个邻域内,$f(z)$ 是单叶的.

这可证明如下:若 $f(z)$ 在域 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上单叶且全纯,但是有 $z_0 \in U$,使得

$f'(z_0) = 0$. 于是，z_0 是函数 $f(z) - f(z_0)$ 的 m 级零点，而 $m \geqslant 2$. 选取 z_0 的一个邻域，使得 $f'(z)$ 在此邻域中除去 z_0 点之外 $f'(z) \neq 0$. 由第 2 章 2.4 节定理 15，对于 $w_0 = f(z_0)$ 所对应的邻域内的 w，$f(z) - w$ 在 z_0 的邻域内恰有 m 个零点. 这与 $f(z)$ 在 U 上单叶相矛盾. 反之，若 $f'(z_0) \neq 0$，则 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的简单零点，由第 2 章 2.4 节定理 15，对充分小的 ρ，存在 $\delta > 0$，使得对 $D(f(z_0), \delta)$ 中任一点 w，$f(z) - w$ 在 $D(z_0, \rho)$ 中只有一个零点，即只有一个 z 使得 $f(z) = w$. 选取 $\rho_1 < \rho$，使得 $f(D(z_0, \rho_1)) \subset D(w_0, \delta)$. 故 $f(z)$ 在 $D(z_0, \rho_1)$ 上是单叶的.

此外，容易证明：若 $w = f(z)$ 在 U 上单叶且全纯，将 U 映为 G，则反函数 $z = g(w)$ 在 G 上单叶全纯，将 G 映为 U. 因此，单叶全纯映射也称为**双全纯映射**（biholomorphic mapping）.

我们来证

定理 1　若 $G \subseteq \mathbf{C}$ 为域，γ 为 G 内可求长简单闭曲线，其内部 $U \subset G$. 若 $f(z)$ 在 G 上全纯，把 γ 双方单值地映为简单闭曲线 Γ，则 $w = f(z)$ 在 U 上单叶，将 U 映为 Γ 的内部 V.

证明　若 w_0 不在 Γ 上，由辐角原理（第 2 章 2.4 节定理 12），函数 $f(z) - w_0$ 在 γ 内的零点个数 N 等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}dz = \pm \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w - w_0}.$$

当 w_0 在 Γ 的外部时，有

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 0,$$

所以 $N = 0$，即 $f(z) - w_0$ 在 U 内无零点. 当 w_0 在 Γ 的内部时，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 1,$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}dz = \pm 1.$$

因为 N 非负，故 $N = 1$，即 $f(z) - w_0$ 在 U 内只有一个零点. 当 z 沿 γ 正方向绕一圈时，$w = f(z)$ 沿 Γ 正方向绕一圈. 当 w_0 在 Γ 上时，$f(z) - w_0$ 在 U 内无零点. 如不然，则有 $z_0 \in U$，使得 $f(z_0) = w_0$. 于是有 $D(w_0, \delta) \subset f(U)$. 对于 $D(w_0, \delta)$ 中每一点 w_1，$f(z) - w_1$ 在 U 内有零点. 取 $w_1 \in D(w_0, \delta)$，且位于 Γ 外，则与 $f(z) - w_1$ 在 U 内无零点相矛盾.

以下举一些最简单的共形映射的例子.

例 1　在第 2 章 2.5 节中已经证明，将单位圆 $D(0,1)$ 映为自己的单叶全纯映

射有且只有

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad (a \in D(0,1), \theta \in \boldsymbol{R}). \tag{1.1}$$

例 2 将上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 映为单位圆 $D(0,1)$ 的单叶全纯映射有且只有

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}} \quad (\mathrm{Im}\, a > 0, \theta \in \boldsymbol{R}). \tag{1.2}$$

显然,这个变换将 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 映为 $|w| = 1$. 映射(1.2) 也可表为

$$z = \frac{\overline{a}w - e^{i\theta}a}{w - e^{i\theta}},$$

将 $|w| = 1$ 映为 $\mathrm{Im}\, z = 0$. 由定理 1 知道,此映射将 $D(0,1)$ 单叶全纯地映为 $\mathrm{Im}\, z > 0$. 反之,如有 $w = f(z)$ 将 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 单叶全纯地映为 $D(0,1)$,已知映射(1.2) 将 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 单叶全纯地映为 $D(0,1)$,记此映射为 $\psi(z)$,则 $f \circ \psi^{-1}$ 将单位圆映为单位圆. 由例 1 知,$f \circ \psi^{-1}$ 必为(1.1) 式的形式,记作 φ,即 $f \circ \psi^{-1} = \varphi$. 故 $f = \varphi \circ \psi$,而此仍为(1.2) 式的形式.

同样可证

例 3 将上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}\, w > 0$ 的单叶全纯映射有且只有

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

这里,a, b, c, d 为实数,且 $ad - bc > 0$.

在第 3 章 3.3 节中,已经证明由所有分式线性变换 $\left\{ w = \dfrac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \boldsymbol{C},\ ad - bc = 1 \right\}$ 所组成的群是扩充复平面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 的亚纯自同构群 $\mathrm{Aut}\{\boldsymbol{C}^*\}$. 这个群与 Möbius 群 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm I\}$ 一一对应,如果 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 对应于 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}/\{\pm I\}$.

如果 $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ 为任意分式线性变换,如将直线看做半径为 ∞ 的圆,则对于分式线性变换,有如下的重要性质:分式线性变换将圆变为圆. 这可证明如下:若 $z = x + iy$,则任意圆可以写成

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

且可取 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 均为实数. 这个方程还可写成

$$\alpha z\overline{z} + \frac{1}{2}\beta(z + \overline{z}) + \frac{1}{2i}\gamma(z - \overline{z}) + \delta = 0,$$

或可写成

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0, \tag{1.3}$$

这里,$A=\alpha$,$C=\delta$为实数,$B=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2\mathrm{i}}\gamma$为复数.若$\alpha=0$,即$A=0$,则(1.3)式表示一条直线,否则(1.3)式表示一个圆.任一分式线性变换$z=\frac{aw+b}{cw+d}$是由平移$z=w+b$,伸缩$z=aw$及反演$z=\frac{1}{w}$等三种变换所组成的,而这三种变换都是将圆变为圆的.这只要一一验证即可.若将$z=w+b$代入(1.3)式,得

$$Aw\overline{w}+(A\overline{b}+B)w+(Ab+\overline{B})\overline{w}+Ab\overline{b}+Bb+\overline{B}\overline{b}+C=0,$$

这仍是(1.3)式的形式.若将$z=aw$代入(1.3)式,得

$$Aa\overline{a}w\overline{w}+Baw+\overline{B}\overline{a}\overline{w}+C=0,$$

这仍是(1.3)式的形式.最后,若将$z=\frac{1}{w}$代入(1.3)式,得

$$Cw\overline{w}+\overline{B}w+B\overline{w}+A=0,$$

这仍是(1.3)式的形式.故分式线性变换将圆映为圆.

若z_1,z_2,z_3,z_4为$\boldsymbol{C}^*$中的四个点,至少有三点是不相同的,称

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

为这四点的**交比**(cross ratio).若这四点中有任一点为∞,则用极限来定义交比,例如

$$(\infty,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}.$$

于是可以证明:在分式线性变换$w=\frac{az+b}{cz+d}$下,将z_1,z_2,z_3,z_4变为w_1,w_2,w_3,w_4,则

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4),$$

即交比在分式线性变换下是不变的.也就是说,交比在分式线性变换群下是一个不变量.证明是容易的,只要将$w=\frac{az+b}{cz+d}$直接代入(w_1,w_2,w_3,w_4),经过计算可以得出,这就是(z_1,z_2,z_3,z_4).

也可以这样证明:记$w_i=\frac{az_i+b}{cz_i+d}$ $(i=2,3,4)$.于是,$(z,z_2,z_3,z_4)=(w,w_2,w_3,w_4)$是一个Möbius变换,且将$z_2$映为$w_2$,将$z_3$映为$w_3$,将$z_4$映为$w_4$.但是,一个Möbius变换由三点完全决定,因此它与$w=\frac{az+b}{cz+d}$是相一致的.因此,如果$w_1=\frac{az_1+b}{cz_1+d}$,则$(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

反过来，如果有一个函数 $f(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 在分式线性变换群下是一个不变量，则 f 只是交比的一个函数. 即在这种意义下，在分式线性变换群下的不变量本质上只有交比. 这可证明如下：若 T 表示分式线性变换，由假设

$$f(Tz_1,Tz_2,Tz_3,Tz_4) = f(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

对任意的 T 都成立. 取 $T_1 = z - z_4$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4) = f(z_1 - z_4, z_2 - z_4, z_3 - z_4, 0);$$

取 $T_2 = \dfrac{1}{z}$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4) = f\left(\frac{1}{z_1 - z_4}, \frac{1}{z_2 - z_4}, \frac{1}{z_3 - z_4}, \infty\right);$$

取 $T_3 = z - \dfrac{1}{z_3 - z_4}$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4) = f\left(\frac{z_3 - z_1}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}, \frac{z_3 - z_2}{(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)}, 0, \infty\right);$$

取 $T_4 = \dfrac{(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)}{z_3 - z_2} z$，则

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2,z_3,z_4) &= f\left(\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}, 1, 0, \infty\right) \\ &= f((z_1,z_2,z_3,z_4), 1, 0, \infty). \end{aligned}$$

这就完成了证明.

4.2 正　规　族

在 Riemann 共形映射理论中，最重要、最深刻的定理是 Riemann 映射定理.

定理 2(Riemann 映射定理)　若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为单连通区域，其边界点多于一点，z_0 为 U 中任意一点，则在 U 上存在唯一的一个单叶全纯函数 $f(z)$，将 U 映到单位圆 $D(0,1)$ 上，且 $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.

其边界点多于一点的要求是自然的. 如果边界点只有一点，不妨取这点为 ∞ 点，若有 $f(z)$ 将它映到单位圆，于是由 Liouville 定理(第 2 章 2.3 节定理 8)，这个函数是常数.

由这个定理立即得到：对于 $\boldsymbol{C}$ 中任意两个边界点多于一点的单连通区域，都有

单叶全纯函数将一个映为另一个.

若 U,V 为 C 中两个域,且存在一个单叶全纯函数将 U 映到 V 上,则称 U,V 是**全纯等价**的.于是,Riemann 映射定理表明:任意边界点多于一点的单连通区域都是全纯等价的.任意单连通区域是相互拓扑等价的,即可以经过连续变换将一个区域变到另一个区域,这是显然的.而 Riemann 映射定理告诉我们:拓扑等价导出全纯等价.这当然是十分深刻的定理.在第 6 章中,我们还可以看到,这个定理在高维情形就不成立(见第 6 章 6.4 节定理 11,Poincaré 定理).这就更突出了这个定理在单复变数函数论中的特殊地位.

证明这个定理要依赖全纯函数的正规族(normal family) 的概念.正规族的概念是函数论中的一个基本概念,在某种意义上,与集合论中的紧致(compact) 集合相当.在第 5 章还将进一步讨论.

定义 1　在域 U 上的函数族 $\mathscr{F}$ 称为**正规的**,如果 $\mathscr{F}$ 中任一序列中一定有子序列在 U 的任一紧致子集上一致收敛,即在 U 上内闭一致收敛.

定理 3(Montel 定理)　若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为域,$\mathscr{F}$ 为 U 上的全纯函数族.若存在正的常数 M,使得

$$|f(z)|\leqslant M$$

对所有的 $z\in U,f\in\mathscr{F}$ 都成立,则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

为了证明定理 3,要证明如下的定理 4.这个定理称为 Ascoli-Arzela 定理,这是很有用处的一条定理.在证明第 5 章 5.5 节定理 7 时还要用到此定理.

定义 2　若 $\mathscr{F}=\{f\}$ 为域 $S\subseteq \boldsymbol{R}^n$ 上的函数族.若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $|z-w|<\delta$ 的任意两点 $z,w\in S$,以及任意 $f\in\mathscr{F}$,有

$$|f(z)-f(w)|<\varepsilon$$

成立,则称 $\mathscr{F}$ 为等度连续的(equicontinuous).

定义 3　若 $\mathscr{F}=\{f\}$ 为域 $S\subseteq \boldsymbol{R}^n$ 上的函数族.若存在一个正数 $M>0$,使得对任意 $z\in S,f\in\mathscr{F}$,有

$$|f(z)|\leqslant M$$

成立,则称 $\mathscr{F}$ 为一致有界的(equibounded).

定理 4(Ascoli-Arzela 定理)　设 K 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧致集合.若函数族 $\mathscr{F}=\{f_\nu\}$ 是等度连续及一致有界的,则 $\mathscr{F}$ 中有子序列在 K 上一致收敛.

也就是说,在紧致集合上等度连续及一致有界可导出一致收敛.

证明　在 K 上存在一个到处稠密的序列 $\{\zeta_k\}$,例如取具有有理坐标的点的全体的集合.由于 $\mathscr{F}$ 在 K 上一致有界,故对 ζ_1,在 $\{f_\nu(\zeta_1)\}$ 中可以找到一个收敛的子序列 $\{f_{\nu_{1k}}(\zeta_1)\}$,然后在 $\{f_{\nu_{1k}}(\zeta_2)\}$ 中可以找到一个收敛的子序列,记作

$\{f_{\nu_{2k}}(\zeta_2)\}$，这样一直进行下去，就得到阵列

$$\begin{aligned}&\nu_{11}<\nu_{12}<\cdots<\nu_{1j}<\cdots,\\&\nu_{21}<\nu_{22}<\cdots<\nu_{2j}<\cdots,\\&\cdots,\\&\nu_{k1}<\nu_{k2}<\cdots<\nu_{kj}<\cdots,\\&\cdots.\end{aligned}\tag{2.1}$$

这里，每一行都是前一行的子序列，且 $\lim\limits_{j\to\infty}f_{\nu_{kj}}(\zeta_k)$ 对所有的 k 都存在. 显然，ν_{jj} 是严格递增序列，也是(2.1) 式中每一行的子序列. 因此，$\{f_{\nu_{jj}}\}$ 是 $\{f_\nu\}$ 的一个子序列，在所有点 ζ_k 上收敛. 为简单起见，记 ν_{jj} 为 ν_j.

由于 $\mathscr{F}$ 在 K 上等度连续，故给定 $\varepsilon>0$，可取到 $\delta>0$，使得对于任意两点 $z,z'\in K$ 及 $f\in\mathscr{F}$，只要 $|z-z'|<\delta$，即可导出 $|f(z)-f(z')|<\varepsilon/3$. 由于 K 为紧致集合，故可以用有限个半径为 $\delta/2$ 的邻域来覆盖 K. 在每一个这样的邻域中取一点 ζ_k，于是存在一个 N，使得当 $i,j>N$ 时，有

$$|f_{\nu_i}(\zeta_k)-f_{\nu_j}(\zeta_k)|<\varepsilon/3$$

成立. 对于每一点 $z\in K$，一定可以找到一点 ζ_k，使得 $|\zeta_k-z|<\delta$，于是

$$|f_{\nu_i}(z)-f_{\nu_i}(\zeta_k)|<\varepsilon/3$$

及

$$|f_{\nu_j}(z)-f_{\nu_j}(\zeta_k)|<\varepsilon/3$$

成立. 因此

$$|f_{\nu_i}(z)-f_{\nu_j}(z)|<\varepsilon$$

当 $i,j>N$ 时成立. 由于 K 为紧致集合，故 $\{f_{\nu_j}\}$ 在 K 上一致收敛. 定理证毕.

还要注意两点：

(1) 定理 4 中的条件，等度连续及一致有界不仅是一致收敛的充分条件，而且也是必要条件. 证明从略.

(2) 定义 2 及定理 4 中等度连续的概念，用的是欧氏度量. 如果用其他的度量(见第 5 章 5.1 节)，定理 4 依然成立. 这一点在第 5 章 5.5 节定理 7 中将用到. 证明从略.

现在应用 Ascoli-Arzela 定理(定理 4) 来证明 Montel 定理(定理 3).

定理 3 的证明 对于 $z_0\in U$，一定有 R，使得 $\overline{D}(z_0,R)\subseteq U$. 由于 U 为开集，故 U 的余集 U^c 为闭集. 由于 $\overline{D}(z_0,R)$ 与 U^c 不相交，故在这两个闭集之间有一正的距离. 即存在 $c>0$，当 $z\in\overline{D}(z_0,R)$，$u\in U^c$ 时，就有 $|z-u|>c$. 对任意 $z\in\overline{D}(z_0,R)$，任意 $f\in\mathscr{F}$，在圆 $\overline{D}(z,c)$ 上用 Cauchy 不等式，得到 $|f'(z)|\leqslant\dfrac{M}{c}$.

记$\dfrac{M}{c} = C$，于是对任意 $z, w \in \overline{D}(z_0, R)$，就有

$$|f(z) - f(w)| \leqslant C|z - w|.$$

这表明$\mathscr{F}$在$\overline{D}(z_0,R)$上是等度连续的.事实上，任给$\varepsilon > 0$，只要取$\delta = \varepsilon / C$即可.

若K为U上任一紧致子集，由于K紧致，所以一定可以用有限个$\overline{D}(z_0,R)$来覆盖.故$\mathscr{F}$在K上也是等度连续的.由 Ascoli-Arzela 定理(定理 4)，对$\mathscr{F}$中任一序列$\{f_\nu\}$，可以找到一个子序列$\{f_{\nu_k}\}$在K上一致收敛.所以，可以用在证明定理 4 的过程中已用过的对角线方法证明在$\{f_\nu\}$中存在这样的子序列$\{f_{\nu_k}\}$，在U中所有紧致集合上一致收敛.定理证毕.

在第 5 章 5.5 节中还要推广正规族的概念及 Montel 定理，用来证明著名的 Picard 定理.

4.3　Riemann 映射定理

现在应用 Montel 定理(定理 3) 来证明 Riemann 映射定理(定理 2).

定理 2 的证明　不妨设U为有界区域.固定一点$z_0 \in U$，记$\mathscr{F} = \{\sigma(z)\}$为单叶全纯函数族，这里，$\sigma(z)$为单叶全纯函数，将$U$映入到$D(0,1)$之中，且$\sigma(z_0) = 0$.这样定义的函数族$\mathscr{F}$是非空的，这是因为由于$U$有界，故有$R > 0$，使得$U \subseteq D(0,R)$.函数$\sigma(\zeta) = \dfrac{1}{2R}(\zeta - z_0)$将$z_0$映为 0，全纯且单叶，且满足$|\sigma(\zeta)| < \dfrac{1}{2R}(R + R) = 1$，故$\sigma \in \mathscr{F}$，由此得出$\mathscr{F}$非空.由于$\mathscr{F}$中每个函数为全纯且有界的(上界为 1)，故由 Montel 定理(定理 3)，$\mathscr{F}$为正规族.定义

$$M = \sup\left\{ |\sigma'(z_0)| \,\middle|\, \sigma \in \mathscr{F} \right\}.$$

若$\overline{D}(z_0,r)$为一个能够包含在U中的以z_0为中心、以r为半径的闭圆，于是由 Cauchy 不等式知$|\sigma'(z_0)| \leqslant \dfrac{1}{r}$，故$M \leqslant \dfrac{1}{r}$.要证明在$\mathscr{F}$中存在$\sigma_0$，使得$\sigma_0'(z_0) = M$.

由M的定义，知在$\mathscr{F}$中存在一个序列σ_j，使得$|\sigma_j'(z_0)| \to M$.由于$\mathscr{F}$为正规族，故序列$\{\sigma_j\}$中有子序列$\{\sigma_{j_k}\}$在U中任一紧致集合上一致收敛到σ_0.由于

$|\sigma_{j_k}{}'(z_0)| \to M$，故 $|\sigma_0{}'(z_0)| = M$. 将 σ_0 乘以模为1的复数，得到一个新的 σ_0，使得 $\sigma_0{}'(z_0) = M$.

现在来证明 σ_0 在 U 上为单叶的. 这里要用到辐角原理(第2章2.4节定理12). 若 Q,R 为 U 中两个不同的点，且 $0 < s < |Q - R|$. 在 $\overline{D}(R,s)$ 上，考虑函数 $\psi_k(z) \equiv \sigma_{j_k}(z) - \sigma_{j_k}(Q)$. 由于 σ_j 为单叶的，ψ_k 在 $\overline{D}(R,s)$ 上不等于零，由 Hurwitz 定理(第2章2.4节定理13)，其极限函数 $\sigma_0(z) - \sigma_0(Q)$ 或者恒等于零，或者在 $\overline{D}(R,s)$ 上恒不为零. 由于 $\sigma_0{}'(z_0) = M > 0$，故 σ_0 不可能恒等于零. 因此，对所有 $z \in \overline{D}(R,s)$，有 $\sigma_0(z) \neq \sigma_0(Q)$，特别有 $\sigma_0(R) \neq \sigma_0(Q)$. 由于 R,Q 为在 U 中任意选择的两点，故 σ_0 为单叶的.

最后证明 σ_0 将 U 映到 $D(0,1)$ 之上，即映射为映上(onto).

由于 U 为单连通区域，如果 F 为 U 上不等于零的全纯函数，则可在 U 上定义 $\ln F$ 为

$$\ln F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} d\zeta + \ln F(z_0),$$

这里，γ_z 为从 z_0 到 z 的逐段 C^1 曲线. 由于 U 是单连通的，故这样定义的 $\ln F(z)$ 是不依赖于道路 γ_z 的选取的. 定义了 $\ln F(z)$，就可以定义 $F(z)$ 的 α 次方

$$F^{\alpha}(z) = \exp(\alpha \ln F(z)),$$

这里，$\alpha \in \boldsymbol{C}$.

如果，σ_0 不是将 U 映上到 $D(0,1)$，则存在点 $\beta \in D(0,1)$，而 $\beta \notin \sigma_0(U)$. 令

$$\varphi_\beta(\zeta) = \frac{\zeta - \beta}{1 - \overline{\beta}\zeta},$$

于是 $\mu(\zeta) = (\varphi_\beta \circ \sigma_0(\zeta))^{1/2}$ 是在 U 上定义的全纯函数. 若 $\tau = \mu(z_0)$，令

$$\varphi_\tau(\zeta) = \frac{\zeta - \tau}{1 - \overline{\tau}\zeta}, \quad \eta(\zeta) = \varphi_\tau \circ \mu(\zeta)$$

及

$$\nu(\zeta) = \frac{|\eta'(z_0)|}{\eta'(z_0)} \eta(\zeta),$$

于是 $\nu \in \mathscr{F}$. 但是 $\nu(z_0) = 0$ 及

$$|\nu'(z_0)| = \frac{1 + |\beta|}{2|\beta|^{1/2}} M > M,$$

这与 σ_0 的定义相矛盾. 故 σ_0 必须是映上. 这样的 σ_0 就是 Riemann 映射定理中所需要的 f. 如果还有全纯单叶函数 $g(z)$ 也有这个性质，则 $F(z) = f(g^{-1}(z))$ 是单位圆上的一个自同构，且 $F(0) = 0, F'(0) > 0$. 由第2章2.5节定理18，$F(z) = z$.

如 U 为无界区域,则可以用变换将 U 变为有界区域.可以这样来进行:

由于边界点至少含有两点,不妨设 $0,a$ $(a\neq\infty)$ 为两个边界点,否则可以用分式线性变换将两个边界点变为 $0,a$.

在 U 上取 $\sqrt{z-a}$ 的一个单值分支,记作 $g(z)$.由于 U 为单连通域,$g(U)$ 仍为单连通域.显然,$g(z)$ 在 U 上是单叶的.因为如有 $z_1,z_2\in U,z_1\neq z_2$,而 $\sqrt{z_1-a}=\sqrt{z_2-a}$ 成立,则立得 $z_1-a=z_2-a$,故 $z_1=z_2$,得到矛盾.再证 $g(U)\cap(-g(U))=\varnothing$.若不然,则有点 $p\in g(U)$,且 $-p\in g(U)$,于是有 z_1, $z_2\in D$,使得 $\sqrt{z_1-a}=p$, $\sqrt{z_2-a}=-p$.由此立得 $z_1=z_2$,故 $p=-p$,从而 $p=0$.但 $0\in\partial U$,故得矛盾.

任取一点 $q\in g(U)$,由于 $g(U)$ 是单连通域,故在 $g(q)$ 点存在一个邻域 $U_q\subset g(U)$,但是 $-U_q\not\subset g(U)$.在 $-U_q$ 中取一点 b,作 $\varphi(z)=\dfrac{1}{z-b}$,则 $\varphi(z)$ 将 $g(U)$ 映为有界单连通域.于是,$\varphi\circ g$ 将 U 单叶地映为一个有界单连通域.

定理证毕.

Riemann 映射定理说的是:有单叶全纯函数将单连通区域 U 内的点与单位圆内的点一一对应.但到边界上有没有相应的对应关系?由于单连通区域可以有十分复杂的边界,这里只叙述一个最简单的情形而不予证明.

若 U 为由一条 Jordan 曲线 Γ 所围成的区域.若 $w=f(z)$ 为 U 上的单叶全纯函数,将 U 映上到单位圆 $D(0,1)$,则 $f(z)$ 可以扩充到 Γ 上,使得 $f(z)$ 在 $\overline{U}$ 上连续,并且在 Γ 上的点与单位圆周 $|w|=1$ 上的点之间有一一对应关系.

4.4 对称原理

定理 5(Painlevé 定理) 若 U_1,U_2 是两个域,$U_1\cap U_2=\varnothing$,$\partial U_1\cap\partial U_2=\gamma$(图 4.1),这里,$\gamma$ 为一段可求长的曲线(端点不在内).若 f_1,f_2 分别在 U_1,U_2 上全纯,在 $U_1\cup\gamma$ 及 $U_2\cup\gamma$ 上连续,且在 γ 上 $f_1(z)=f_2(z)$,则函数

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & \text{当 } z\in U_1,\\ f_1(z)=f_2(z), & \text{当 } z\in\gamma,\\ f_2(z), & \text{当 } z\in U_2\end{cases}$$

在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上全纯. f_1 与 f_2 称为越过边界 γ **互为解析开拓**.

证明 由已给的条件知道: f 在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上连续, 在 U_1, U_2 上全纯, 所以只要证明 $f(z)$ 在 γ 上全纯.

设 $z_0 \in \gamma$, 取 r, 使得 $D(z_0, r) \subset U = U_1 \cup U_2 \cup \gamma$. 设 Γ 是 $D(z_0, r)$ 内任一可求长简单闭曲线. 若 Γ 在 $U_1 \cup \gamma$ 之内, 则由 Cauchy 积分定理得

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma f_1(z)\mathrm{d}z = 0.$$

同理, 若 Γ 在 $U_2 \cup \gamma$ 之内, 则

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma f_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

若 Γ 同时属于 U_1 及 U_2, Γ_1 为属于 U_1 的部分, Γ_2 为属于 U_2 的部分, γ 在 Γ 的内部的部分记作 Γ_0, 则

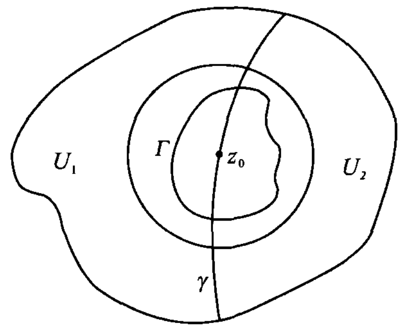


图 4.1

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1+\Gamma_0} f_1(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2-\Gamma_0} f_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

故由 Morera 定理(第 2 章 2.3 节定理 7), $f(z)$ 在 $D(z_0, r)$ 上全纯, 特别在 $z = z_0$ 处全纯. 而 z_0 为 γ 上任一点, 故 $f(z)$ 在 U 上全纯.

由 Painlevé 定理, 可以推出

定理 6(对称原理) 设域 U 位于实数轴的同一侧, 其边界包含有实数轴上的线段 s(端点不在内). 若 $f(z)$ 在 U 上全纯, 在 $U \cup s$ 上连续, 且 $f(z)$ 在 s 上取实值, 则一定存在一个函数 $F(z)$, 在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯, 且在 U 内 $F(z) = f(z)$, 这里, U' 为 U 关于实数轴对称的域, 且 $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$.

证明 在 $U \cup U' \cup s$ 上定义函数

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{当 } z \in U \cup s, \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{当 } z \in U'. \end{cases}$$

这样的函数满足 $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$. 于是只要证 $F(z)$ 在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯. 先证 $F(z)$ 在 U' 上全纯. 若 $z_0 \in U'$, z 是 z_0 的邻域内的一点, 则

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)},$$

故

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

又由于 $f(z)$ 在 s 上取实值,即当 $x_0 \in s$ 时 $\overline{f(x_0)} = f(x_0)$. 故当 $z \in U'$ 时,有

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} F(z) = \lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} \overline{f(\overline{z})} = \overline{\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} f(\overline{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0),$$

故 $F(z)$ 在 $U' \cup s$ 上连续. 由 Painlevé 定理(定理5),$F(z)$ 在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯.

定理 6 还可叙述成更为一般的形式:

定理 6′(对称原理) 设 U 位于直线 l 的同一侧,其边界包含 l 上一线段 s(端点不在内). 若 $f(z)$ 在 U 上全纯,在 $U \cup s$ 上连续,且 $f(z)$ 在 s 上的值位于直线 L 上,则存在 $F(z)$ 在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯,在 U 内 $F(z) = f(z)$,这里,U' 为 U 关于 l 对称的域. 若 z_1, z_2 为 $U \cup U' \cup s$ 内关于 l 对称的两点,则 $F(z_1), F(z_2)$ 是关于 L 对称的两点.

证明 用变换 $Z = az + b$ 将 l 变成实数轴,用变换 $W = cw + d$ 将 L 变为实数轴,然后对 Z, W 用对称原理,最后再回到 z, w 来即可.

对称原理还可以推广成:将定理 6 中的 s 改成一段圆弧,将定理 6′ 中的 l 改成一段圆弧,则同样可以解析开拓.

4.5 Riemann 曲面举例

Riemann 映射定理说的是:任意两个单连通区域(边界多于一点)是全纯等价的,即存在双方单值(即单叶)的全纯映射,将一个映为另一个. 如果全纯映射不是双方单值(即单叶)的,如多值函数或无穷多值函数,则如何建立起映射的一一对应?这就要有 Riemann 曲面的概念. Riemann 曲面是复分析中极为重要的概念,可以用很多篇幅来叙述. 例如,可参阅 L. V. Ahlfors and L. Sario[1],伍鸿熙、吕以辇、陈志华[1] 以及 G. Springer[1]. 更为重要的是,Riemann 曲面就是一维复流形,而一般意义下的复分析就是在复流形上讨论分析. 但在作为大学本科生教材的本书中,只能用举例的办法来描述什么是 Riemann 曲面.

在第 1 章 1.6 节中讨论初等函数时,就已经看到,对于幂函数 $w = z^{\alpha}$ ($\alpha = a + \mathrm{i}b$),当 $b \neq 0$ 时,$w = z^{\alpha}$ 是无穷多值函数;当 $b = 0$ 而 $a = n$ 为整数时,$w = z^n$ 为单值函数,但反函数不是单值的. 当 z 在角形区域 $\frac{2(k-1)\pi}{n} < \arg z < \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) 中变动时,$w = z^n$ 将任一这样的角形区域映为整个 w 平面除去

正实数轴.这个映射是一一的、全纯的.每个这样的角形区域的像在正实数轴上有一个“切割”(cut).于是,这 n 个角形区域对应到 n 张 w 复平面加上切割.将这 n 张平面按 $k=1,2,\cdots,n$ 进行排列,然后将前一张平面的切割的下边沿与后一张平面的切割的上边沿粘起来,而第 n 张平面的切割的下边沿与第一张平面的切割的上边沿粘起来(这样做起来似乎不可能,除非这些张平面自己相交,但这里是指让第 n 张平面的切割的下边沿与第一张平面的切割的上边沿相等同).于是,这样就构成了一个 Riemann 曲面.称每一张平面为 Riemann 曲面的一叶(sheet),或称为 Riemann 曲面的一个**分支**.十分清楚,当点 z 在 z 平面上变动时,相应的点 w 在 Riemann 曲面上变动,并且 z 平面与 Riemann 曲面之间的点是相互一一对应的.

取正实数轴作为切割可以用任意的从 0 到 ∞ 的射线作为切割来代替,这样得到的 Riemann 曲面与原来得到的 Riemann 曲面是相等同的,即可以用任意的从 0 到 ∞ 的射线作为切割.但在对 Riemann 曲面进行讨论之前必须说明是如何切割的.

点 $w=0$ 有特殊的位置,它联系着所有的分支,一条曲线围绕 $w=0$ 旋转,必须转 n 圈后才能封闭,这样的点称为**支点**(branch point).如果将 $z=\infty$ 也考虑在内,则 ∞ 点也是一个支点.一般来说,一个支点不必联系所有的分支.如果它联系 h 叶,则称此为 $h-1$ 阶(order) 的支点.

同样,我们可以讨论 $w=\mathrm{e}^z$ 的 Riemann 曲面.这个函数将带域 $2(k-1)\pi<y<2k\pi$ $(z=x+\mathrm{i}y)$ 映为 w 平面的一叶,而切割为正实数轴.有无穷多叶相互粘接,而 $w=0$ 不在 Riemann 曲面上,因为 e^z 永不为零.

反过来,若函数为 $w=z^{\frac{1}{n}}$,而 n 为大于 1 的正整数,则这个函数将 n 叶的 Riemann 曲面映为 w 平面,而且相互一一对应.同样,$w=\ln z$ 将无穷多叶的 Riemann 曲面映为 w 平面,而且相互一一对应.

因此,在讨论 Riemann 曲面与复平面之间的对应时,往往必须指明这个讨论是在 Riemann 曲面的哪一叶上进行.

4.6 Schwarz-Christoffel 公式

Riemann 映射定理是一个存在定理,至于如何具体写出这个映射来,却不是一

件简单的事.在 4.1 节中只是举了几个最简单的例子.下面要给出将上半平面映射到一个多边形的具体公式,这个公式称为 Schwarz-Christoffel 公式.

若 $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$ 为 n 个实数,取 $a_0 = -\infty, a_{n+1} = \infty$.若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 个正的实数,满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + 1 < n$,且令

$$\beta(t) = (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_n)^{\alpha_n - 1}, \tag{6.1}$$

则显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)| \mathrm{d}t < \infty.$$

当 $t < a_k$ 时,取

$$(t - a_k)^{\alpha_k - 1} = \exp((\alpha_k - 1) \ln (t - a_k))$$

这样的一支,使其辐角为 $\pi(\alpha_k - 1)$.于是,当 $t < a_1$ 时

$$\arg \beta(t) = \pi[(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) - n];$$

当 t 在(a_{k-1}, a_k)这个线段上时

$$\arg \beta(t) = \pi[(\alpha_k + \cdots + \alpha_n) - (n - k + 1)] \quad (2 \leqslant k \leqslant n);$$

当 t 在(a_n, ∞)这个线段上时

$$\arg \beta(t) = 0.$$

于是定义了 $n+2$ 个复数

$$w_k = c\int_0^{a_k} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \mathrm{d}t \quad (0 \leqslant k \leqslant n+1), \tag{6.2}$$

这里,c 为一个正的常数.在上半平面 $\overline{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ 上,定义函数

$$f(z) = c\int_0^z \beta(t) \mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

这个函数显然在 $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上是全纯的.而在实数轴上有:当 $x \in (a_{k-1}, a_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= w_{k-1} + c\int_{a_{k-1}}^{x} \beta(t) \mathrm{d}t \\ &= w_{k-1} + c e^{\mathrm{i}[(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi]} \int_{a_{k-1}}^{x} |\beta(t)| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

于是,$f(x) - w_{k-1}$ 在区间(a_{k-1}, a_k)上有相同的辐角$(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi$,而其绝对值由 0 增长到

$$l_k = c\int_{a_{k-1}}^{a_k} |\beta(t)| \mathrm{d}t. \tag{6.4}$$

故当 x 在区间$[a_{k-1}, a_k]$中变动时,$f(x)$ 在区间 $\Delta_{k-1} = [w_{k-1}, w_k]$ 中变动.Δ_{k-1} 的辐角为$(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi$,长度为 l_k.

要证 $w_0 = w_{n+1}$，只要证明对任给 $\varepsilon > 0$，有 $R > 0$，使得当 $z \in \overline{H}$ 及 $|z| \geqslant R$ 时，$|w_0 - f(z)| \leqslant \varepsilon$ 成立即可，因为这表明 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_{n+1} = w_0$. 这可证明如下：

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)|\, \mathrm{d}t < \infty,$$

故任给 $\varepsilon > 0$，有 $R_1 > 0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $-\infty < x < -R_1$ 时，有

$$\left| w_0 - c\int_0^x \beta(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

当然可取 $R_1 \geqslant \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}$. 取 $z_0 = \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，而 $\rho_0 \geqslant R_1$，$0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$. 于是

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(\rho_0)| &= c\left|\int_0^{\theta_0} (\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a_1)^{\alpha_1 - 1}\cdots(\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a_n)^{\alpha_n - 1}\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant c\rho_0(\rho_0 - R_1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - n}. \end{aligned}$$

由于 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < n - 1$，故当 $\rho_0 \to \infty$ 时，上式右边趋于零. 故有 $R \geqslant R_1$，使得当 $\rho_0 = |z_0| \geqslant R$ 时，$|f(z_0) - f(\rho_0)| \leqslant \varepsilon/2$. 因此，当 $|z| \geqslant R$，$\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ 时，$|f(z) - w_0| \leqslant \varepsilon$. 这就证明了 $w_0 = w_{n+1}$. 于是，f 将 $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 映到闭 $n+1$ 边形 Δ，其边为 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_n$，其顶点为 $w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1} = w_0$.

若假设 $0 < \alpha_k < 2$，则可证明这个多边形在顶点 w_k 处，其内角为 $\alpha_k\pi$. 这可证明如下：

由于 $\beta(t)$ 可写成 $\beta_k(t)(t - a_k)^{\alpha_k - 1}$，这里，$\beta_k(t) = \prod\limits_{j\neq k}(t - a_j)^{\alpha_j}$，显然 $\beta_k(t)$ 在 a_k 点的一个邻域 V 中是全纯的，故可展开成 Taylor 级数

$$\beta_k(t) = a_{0,k} + a_{1,k}(t - a_k) + \cdots \quad (a_{0,k} \neq 0).$$

于是当 $z \in V \cap \overline{H}$ 时，有

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + c\int_{a_k}^{z} (a_{0,k} + a_{1,k}(t - a_k) + \cdots)(t - a_k)^{\alpha_k - 1}\mathrm{d}t \\ &= w_k + c\frac{a_{0,k}}{\alpha_k}(z - a_k)^{\alpha_k}\left(1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_k + 1}\cdot\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}}(z - a_k) + \cdots\right). \end{aligned}$$

当 z 沿着倾角为 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 的直线趋于 a_k 时，$f(z)$ 沿着一条曲线趋于 w_k，而在 w_k 点处，其切线的倾角为 $\arg a_{0,k} + \alpha_k\theta$，这是因为 $c > 0$ 及 $\alpha_k > 0$. 在 $\overline{H}$ 中作

一个以 a_k 为中心的小半圆，使之全包在 $V \cap \overline{H}$ 之中. 让 z 在这个小半圆的圆周上变动，从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$，这样 $f(z)$ 在一条 Jordan 曲线上变动，从 Δ_{k-1} 上的点变到 Δ_k 上的点，而 $f(z)$ 的辐角也由 $\arg a_{0,k}$ 变到 $\arg a_{0,k} + \alpha_k\pi$. 故在顶点 w_k 处的内角为 $\alpha_k\pi$. 而在顶点 $w_0 = w_{n+1}$ 处的内角为 $[(n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)]\pi > 0$，这是因为 $n+1$ 边形的内角之和为 $(n-1)\pi$. 特别当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = n-2$ 时，顶点 w_0 处的内角为 π，即此为 n 边形.

公式(6.3) 就叫做 Schwarz-Christoffel 公式. 这里，$\beta(t)$ 由(6.1) 式所定义，而 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n < n-1$. (6.3) 式将上半平面映为 $n+1$ 边形，其顶点分别为 $w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1} = w_0, w_j\ (j = 0,1,\cdots,n+1)$ 由(6.2) 式所定义. 多边形的边为 $[w_{k-1}, w_k]\ (k = 1,\cdots,n+1)$，其长度为 l_k，由(6.4) 式给出. 若 $0 < \alpha_j < 2\ (j = 1,\cdots,n)$，则在顶点 w_k 处的内角为 $\alpha_k\pi\ (k = 1,\cdots,n)$. 在 $w_0 = w_{n+1}$ 处的内角为 $[(n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)]\pi$.

当然，如果把(6.2) 式写成更一般的形式

$$w_k = c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\mathrm{d}t + c' \quad (0 \leqslant k \leqslant n+1),$$

(6.3) 式还可写成更一般的形式：

$$f(z) = c\int_0^z \beta(t)\mathrm{d}t + c', \tag{6.3'}$$

这里，c, c' 为两个复的常数.

公式(6.3′) 也是 Schwarz-Christoffel 公式.

习　题　4

1. 验证 4.1 节中的例子.

2. 证明交比在分式线性变换下不变.

3. 证明：若整函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在实数轴上取实值，则所有的 $c_n(n = 0, 1,\cdots)$ 是实数.

4. 试作出 $w = z + \sqrt{z^2-1}$ 的 Riemann 曲面.

5. 证明：任一圆周都可表为 $\left|\dfrac{z-z_1}{z_1-z_2}\right| = k\ (k > 0)$，其中，$z_1, z_2$ 是关于它的

两个对称点．当 $k\neq 1$ 时，这个圆周的圆心及半径分别为

$$a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2},\quad R=\frac{k\,|z_1-z_2|}{|1-k^2|}.$$

6．证明：交比 (z_1,z_2,z_3,z_4) 为实数的充要条件是 z_1,z_2,z_3,z_4 这四点共圆．

7．**（Carathéodory 不等式）**利用 Schwarz 引理及线性变换，证明：若函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内全纯，在 $|z|\leqslant R$ 上连续，$M(r)$ 及 $A(r)$ 分别为 $|f(z)|$ 及 $\mathrm{Re}\,f(z)$ 在圆周 $|z|=r$ 上的最大值，则当 $0<r<R$ 时，有

$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

8．设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在单位圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $|f(z)|\leqslant M$，证明：

$$M|a_1|\leqslant M^2-|a_0|^2.$$

9．试作下列共形映射：

（ⅰ）把 z 平面上的带形区域 $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ 映射成 $|w|<1$；

（ⅱ）把 z 平面上的半圆盘 $|z|<1,\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成上半平面；

（ⅲ）把 z 平面上 $|z|<1$ 及 $|z-1|<1$ 的公共部分映射成 $|w|<1$；

（ⅳ）把 z 平面上的扇形 $\{z\,|\,0<\arg z<\alpha\ (\alpha<2\pi),|z|<1\}$ 映射成 $|w|<1$；

（ⅴ）把 z 平面上的圆 $|z|<1$ 映射成带形区域 $0<v<1\ (w=u+\mathrm{i}v)$，并把 $-1,1,\mathrm{i}$ 映射成 ∞,∞,i；

（ⅵ）把 z 平面去掉负实数轴上从 $-\frac{1}{4}$ 到 $-\infty$ 的射线映射成 $|w|<1$．

10．利用 Schwarz-Christoffel 公式，写出下列将上半平面映射到多边形 P 的共形映射：

（ⅰ）P 为三角形，顶点为 w_1,w_2,w_3，相应的顶角为 $\alpha\pi,\beta\pi,\gamma\pi$，而 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$；

（ⅱ）P 为等边三角形，顶点为 $w_1=0,w_2=a,w_3=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}a$，其中 $a>0$；

（ⅲ）P 为等腰三角形，顶点为 $w_1=0,w_2=a,w_3=a(1+\mathrm{i})$，其中 $a>0$；

（ⅳ）P 为矩形，其顶点为 $w_1=-k_1,w_2=k_1,w_3=k_1+\mathrm{i}k_2,w_4=-k_1+\mathrm{i}k_2$，其中 $k_1>0,k_2>0$；

（ⅴ）P 为菱形，其顶点为 $0,a,a(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\pi}),a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\pi}$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2},a>0$；

（ⅵ）P 为正五角星的内部，P 的中心在原点，$w=1$ 是 P 的一个顶点．

11. 如果在 Riemann 映射定理中，z_0 是实的，而 U 是一个关于实数轴对称的区域，由映射的唯一性定理，证明 f 满足对称关系 $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

12. 证明：所有在域 Ω 上定义且取值于右半平面的全纯函数的全体记作 $\mathscr{F}$. 若有点 $z_0 \in \Omega$，且对所有的 $f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{F}$，有 $f(z_0) = g(z_0)$，则 $\mathscr{F}$ 是正规族.

13. 证明：所有在域 Ω 上定义且取值于 $U_0 = \boldsymbol{C} \setminus \{x + \mathrm{i}0 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 之内的全纯函数的全体记作 $\mathscr{F}$. 若有点 $z_0 \in \Omega$，且对所有的 $f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{F}$，有 $f(z_0) = g(z_0)$，则 $\mathscr{F}$ 是正规族.

附录　Riemann 曲面

在本章 4.5 节中，对 Riemann 曲面只是用举例的办法来描述. 在这个附录中，将给出 Riemann 曲面的严格定义.

若 X 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 X 的一些子集构成的族. 如果

（ⅰ）X 与空集均属于 $\mathscr{F}$；

（ⅱ）任意个 $\mathscr{F}$ 的元之和属于 $\mathscr{F}$；

（ⅲ）$\mathscr{F}$ 中任意两个元之交属于 $\mathscr{F}$，

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个拓扑. $\mathscr{F}$ 的元称为开集，赋予一个拓扑的集合称为**拓扑空间**，记作 $(X, \mathscr{F})$.

十分简略地说：拓扑空间就是定义了开集的集合.

若集合 $U \subset X$，点 $x \in X$，如果存在 X 中的开集 G，使得 $x \in G \subset U$，则称 U 为 x 的一个**邻域**.

一个拓扑空间称为 Hausdorff 空间，如果其中任意两个不同的点均有不相交的邻域.

若 X, Y 为两个拓扑空间，f 为 X 到 Y 映上一对一的映射，且 f 与 f^{-1} 均为连续映射，则称 f 为 X 到 Y 的一个**同胚**.

一个局部与欧氏平面同胚的 Hausdorff 空间叫做**曲面**. 这里，局部与欧氏平面同胚是指空间中任一点均有它的一个邻域与欧氏平面上的一个开集同胚.

一个 **Riemann 曲面**是一个连通的 Hausdorff 拓扑空间 C，连同 C 的一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和一族映射 $f_\alpha: U_\alpha \to \boldsymbol{C}$，满足

(a) $f: U_\alpha \to \boldsymbol{C}$ 是 U_α 到 $\boldsymbol{C}$ 中开集 $f_\alpha(U_\alpha)$ 的同胚映射；

(b) 只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，函数

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1}:\ f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是双全纯的（即函数本身及反函数都是全纯的），称 (U_α, f_α) 为局部全纯坐标，$\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ 为全纯坐标覆盖.

十分简略地说：Riemann 曲面就是一个局部欧的 Hausdorff 空间加上复结构.

以上 Riemann 曲面的定义也是一维复流形的定义. 高维复流形也可仿此定义.

下面举个简单的 Riemann 曲面的例子.

例 扩充复平面 $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 是 Riemann 曲面.

容易验证 $\boldsymbol{C}^*$ 是连通的 Hausdorff 拓扑空间.

取 $\boldsymbol{C}^*$ 的开覆盖为 $\{U_0, U_1\}$，这里

$$U_0 = \boldsymbol{C},\quad U_1 = \boldsymbol{C}^* \setminus \{0\}.$$

令 $f_0(z) = z, f_1(z) = \begin{cases} 0, & 若\ z = \infty, \\ \dfrac{1}{z}, & 若\ z \neq \infty. \end{cases}$ 显然，$f_1 \circ f_0^{-1}$ 及 $f_0 \circ f_1^{-1}$ 在 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上都是双全纯的.

因此，$\boldsymbol{C}^*$ 是一个 Riemann 曲面. 由此易证：Riemann 球也是 Riemann 曲面.

对 Riemann 曲面的进一步讨论，例如，如何在 Riemann 曲面上定义微分、积分，如何对 Riemann 曲面进行分类，定义亚纯函数、零点与极点等，都已超出本书的范围. 有兴趣的读者可参阅有关文献.

第 5 章　微分几何与 Picard 定理

5.1　度量与曲率

在这一章中，将介绍一些复的微分几何的初步知识，并用来处理复分析中的一些定理，例如 Picard 定理. Picard 定理也许是复分析尤其是值分布理论中最为重要的经典定理之一，原来的证明很复杂，现在用微分几何来证，显得简单明了.

若 Ω 为 $\mathbf{C}$ 中的域，在 Ω 上定义一个非负的 C^2 函数 ρ，称为度量(metric)，即 $\mathrm{d}s_\rho{}^2 = \rho^2 \mid \mathrm{d}z \mid^2$. 由此得到距离函数 d，在两点 $z_1 \in \Omega, z_2 \in \Omega$ 之间的距离定义为

$$d(z_1, z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \rho(z) \mid \mathrm{d}z \mid, \tag{1.1}$$

这里，inf 是在所有连接 z_1, z_2 两点且各点全在 Ω 中的曲线 γ 上取的.

对度量 ρ，可以定义曲率

$$K(z,\rho) = -\frac{\triangle \ln \rho(z)}{\rho^2(z)}, \tag{1.2}$$

这里，$\triangle$ 为 Laplace 算子，即

$$\begin{aligned}\triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},\end{aligned}$$

其中

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

可以证明：这样定义的曲率是与通常微分几何中定义的 Gauss 曲率相一致的

(见本章附录).

在复的微分几何中,常用以下三种重要的度量:

1. 欧氏度量

若 $\Omega = \boldsymbol{C}$,在 $\boldsymbol{C}$ 中取度量 $\rho(z) = 1$ (对所有的 $z \in \boldsymbol{C}$),即 $\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}z|^2$,称这个度量为**欧氏度量**(Euclidean metric) 或**抛物度量**(parabolic metric). 两点 z_1, z_2 之间的距离称为欧氏距离,而 $d(z_1, z_2) = \inf\limits_{\gamma}\int_{\gamma} |\mathrm{d}z| = |z_1 - z_2| =$ 连接 z_1, z_2 两点直线段的长度.

由变换 $\{w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + a \mid \theta$ 为任意实数,a 为任意复数$\}$ 所组成的群,即由旋转 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ 与平移 $w = z + a$ 的复合所组成的群称为欧氏运动群,或刚体运动群,这是 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$ 中的一个子群. 显然,欧氏度量是在欧氏运动群下的不变度量. 而由定义(1.2),这时候 $K(z,\rho) = 0$ 对任意的 $z \in \boldsymbol{C}$ 都成立,所以称这个度量为抛物度量.

2. Poincaré 度量

若 Ω 为单位圆 $D(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$,在 $D(0,1)$ 上取度量 $\rho = \lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$,即 $\mathrm{d}s_\lambda{}^2 = \dfrac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$. 称这个度量为 **Poincaré 度量**(Poincaré metric) 或**双曲度量**(hyperbolic metric). 在第 2 章 2.5 节中已经证明: $D(0,1)$ 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 由变换 $\left\{w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \;\middle|\; \theta \text{ 为任意实数}, a \in D(0,1)\right\}$ 所组成,即群由旋转及 Möbius 变换所组成. 在第 2 章 2.5 节中也已证明: Poincaré 度量是在 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 下的不变度量.

现在来计算 $D(0,1)$ 中两点 z_1, z_2 间的 Poincaré 距离.

先考虑 $D(0,1)$ 中两点 $z_1 = 0$ 及 $z_2 = R + \mathrm{i}0$ $(R < 1)$ 之间的 Poincaré 距离. 这时候,连接这两点的曲线 γ 可以写成

$$z(t) = u(t) + \mathrm{i}w(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

其中

$$w(0) = u(0) = w(1) = 0, \quad u(1) = R.$$

而 $(u(t))^2 + (w(t))^2 < 1$, u, w 为 t 的 C^1 实值函数. 于是

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\mathrm{d}s &= \int_{\gamma}\frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2} = 2\int_0^1 \frac{((u'(t))^2 + (w'(t))^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}{1-(u(t))^2-(w(t))^2} \\ &\geqslant \int_0^1 \frac{2|u'(t)|\mathrm{d}t}{1-(u(t))^2} \geqslant \left|\int_0^R \frac{2\mathrm{d}u}{1-u^2}\right|\end{aligned}$$

$$= \ln \frac{1+R}{1-R},$$

等号成立当且仅当 $w(t) = 0\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$. 所以得到

$$d(0, R+\mathrm{i}0) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{1-|z|^2} = \ln \frac{1+R}{1-R},$$

而使积分取 inf 的 γ 为连接 0 及 $R+\mathrm{i}0$ 的直线段.

由于 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ 是 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 中的一个元素, 故 $D(0,1)$ 中任意两点间的 Poincaré 距离经 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ 变换后是不变的. 因此, 有

$$d(0, R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln \frac{1+R}{1-R}$$

对任意实数 θ 都成立.

若 z_1, z_2 为 $D(0,1)$ 中任意两点, 则

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}$$

为 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 中的一个元素, 将 z_1 映为 0, 将 z_2 映为

$$\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}.$$

于是

$$d(z_1, z_2) = d\left(0, \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right) = \ln \frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|}. \tag{1.3}$$

这就是 $D(0,1)$ 中任意两点 z_1, z_2 之间的 Poincaré 距离或双曲距离. 这时候, 在

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

中取 inf 的 γ 为曲线

$$z = \frac{z_1 + \dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2} t}{1 + \overline{z}_1 \dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2} t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

即

$$z = \frac{(1-t) z_1 + (t - z_1 \overline{z}_1) z_2}{1 - t z_1 \overline{z}_1 - (1-t) \overline{z}_1 z_2} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

从 (1.3) 式可以看出, 当 $z_2 \to z_1$ 时, $d(z_1, z_2) = 0$; 当 z_1 或 z_2 趋于 $D(0,1)$ 的边界点时, $d(z_1, z_2) \to \infty$.

第 2 章 2.5 节定理 19 为 Schwarz-Pick 引理: 若 $w = f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中的全

纯函数，将 $D(0,1)$ 映入到 $D(0,1)$，且 $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$，则有

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1} w_2}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|, \tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 $f(z) \in \mathrm{Aut}(D(0,1))$.

由(1.3)式，可将(1.4)式改写成

$$d(w_1, w_2) \leqslant d(z_1, z_2).$$

于是，Schwarz-Pick 引理有明确的几何意义：若 $w = f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中的全纯函数，将 $D(0,1)$ 映入到 $D(0,1)$，则 $D(0,1)$ 中任意两点之间的 Poincaré 距离经过映射后是不会增加的，距离相等当且仅当 $f(z) \in \mathrm{Aut}(D(0,1))$.

由于 $\triangle = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，故

$$-\triangle \ln \lambda(z) = \triangle \ln(1 - |z|^2) = -\frac{4}{(1 - |z|^2)^2},$$

故双曲度量 $\lambda(z)$ 的曲率 $K(z,\lambda) = -1$ 对所有 $z \in D(0,1)$ 都成立，所以称这个度量为双曲度量.

3. 球度量

若 Ω 为 $\boldsymbol{C}^*$，在 $\boldsymbol{C}^*$ 上取度量 $\rho = \sigma(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$，即

$$\mathrm{d}s_\sigma^2 = \frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1 + |z|^2)^2},$$

称这个度量为**球度量**(spherical metric)或**椭圆度量**(elliptic metric). 在第1章1.2节中介绍过球面投影(stereographic projection)，这个投影建立起了 Riemann 球面 S^2 上的点与 $\boldsymbol{C}^*$ 中的点之间的一一对应. 若 $z \in \boldsymbol{C}^*$，则在 S^2 上对应的点的坐标为

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{\mathrm{i}(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right). \tag{1.5}$$

若 $P = (x_1, x_2, x_3)$ 与 $P' = (x_1', x_2', x_3')$ 为 S^2 上的两点，则这两点之间在 S^2 上的最短距离为过 P, P' 的大圆上的弧 $\widehat{PP'}$ 的弧长. 这个弧长等于

$$2\arctan\sqrt{\frac{1 - x_1x_1' - x_2x_2' - x_3x_3'}{1 + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'}}.$$

由(1.5)式，这等于 $2\arctan\left|\frac{z - z'}{1 + z\overline{z'}}\right|$. 将这个距离作为 $\boldsymbol{C}^*$ 中的一种度量，得到 z, z' 之间的距离为

$$d(z,z') = 2\arctan\left|\frac{z - z'}{1 + z\overline{z'}}\right|.$$

显然,相应的度量为

$$ds^2 = \frac{4\,|\,dz\,|^2}{(1 + |\,z\,|^2)^2},$$

这只要对 d 求微分即可得到. 也就是:

$$ds^2 = (\sigma(z))^2\,|\,dz\,|^2 \quad \left(\sigma(z) = \frac{2}{1 + |\,z\,|^2}\right).$$

于是,度量 $\sigma(z)$ 有十分明确的几何意义. 用度量 $\sigma(z)$ 来计算 $\boldsymbol{C}^*$ 中两点之间的距离,等于在 S^2 上对应的两点之间的最短距离,即球面距离. 也就是说,用 S^2 上对应两点之间的球面距离作为 $\boldsymbol{C}^*$ 中两点之间的距离,于是有

$$d(z_1,z_2) = \inf_{\gamma}\int_{\gamma}\sigma(z)\,|\,dz\,|,$$

这里,γ 为连接 z_1,z_2 的任意曲线.

若 z_1,z_2 在 S^2 上对应的点为 P_1,P_2,连接过 P_1,P_2 点的大圆上的弧 $\widehat{P_1P_2}$,将 $\widehat{P_1P_2}$ 经过球面投影到 $\boldsymbol{C}^*$ 中连接 z_1 与 z_2 的曲线 γ_0,这个 γ_0 就是使上式中积分取 inf 的曲线. 这是为什么称度量 $\sigma(z)$ 为球度量的原因.

容易计算得到:球度量 $\sigma(z)$ 的曲率在每一点 $z \in \boldsymbol{C}^*$ 为 1,所以称这个度量为椭圆度量.

在第 3 章 3.3 节中已经叙述了单值化定理:任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一:$\boldsymbol{C}$,$D(0,1)$ 以及 $\boldsymbol{C}^*$. 这就是为什么要在这三个区域上来定义并讨论几何的原因.

由(1.2)式所定义的曲率有一个重要的性质,就是曲率是在全纯映射下的不变量.

若 Ω_1 及 Ω_2 为 $\boldsymbol{C}$ 中的两个区域,f 为 Ω_1 上的全纯函数,将 Ω_1 映为 Ω_2. 若 ρ 为 Ω_2 上的一个度量,且 $f' \neq 0$,则

$$f * \rho = (\rho \circ f)\,|\,f'\,| \tag{1.6}$$

定义了在 Ω_1 上的一个度量. 这个度量称为由度量 ρ 通过 $f(z)$ 拉回来(pullback) 到 Ω_1 上的度量. 要证的是

$$K(z, f * \rho) = K(f(z), \rho).$$

这可证明如下:

由于

$$\triangle \ln\,|\,f'(z)\,| = 0$$

以及

$$\begin{aligned}\triangle \ln(\rho \circ f(z)) &= 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\ln(\rho \circ f(z)) \\ &= 4\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial \bar{f}}\ln(\rho \circ f)\right) \\ &= |f'(z)|^2(\triangle_f \ln \rho)\circ f(z),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}K(z, f * \rho) &= -\frac{|f'(z)|^2(\triangle_f \ln \rho)\circ f(z)}{(\rho \circ f(z))^2 |f'(z)|^2} \\ &= -\frac{(\triangle_f \ln \rho)\circ f(z)}{(\rho \circ f(z))^2} \\ &= K(f(z), \rho).\end{aligned}$$

5.2 Ahlfors-Achwarz 引理

第2章2.5节定理17给出了经典的Schwarz引理的解析形式.第2章2.5节定理19给出了Schwarz-Pick引理,这是经典的Schwarz引理的推广.在上一节中,给出了Schwarz-Pick引理的微分几何的意义,这是用Poincaré度量来刻画的.这里要给出Schwarz引理的另一种形式的推广,即Ahlfors-Schwarz引理,这是用曲率来刻画的,且是Schwarz-Pick引理的推广.这条引理是在1938年由Ahlfors所建立的(L. V. Ahlfors[2]).这条引理可以说是微分几何进入复分析的开始,也是用微分几何的观点来处理复分析问题的开始.

定理 1(Ahlfors-Schwarz 引理) 设 $f(z)$ 为 $D(0,1)$ 上的全纯函数,f 将 $D(0,1)$ 映为 U.如果在 U 上可以引入一个度量ρ,即 $ds_\rho^2 = (\rho(z))^2 |dz|^2$,使得其曲率在 U 上任一点都小于等于 -1,则

$$f * \rho(z) \leqslant \lambda(z), \tag{2.1}$$

其中,$\lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$,即

$$ds_\rho^2 \leqslant ds_\lambda^2. \tag{2.2}$$

也就是经过映射后,度量不增加.

证明 任意固定 $r \in (0,1)$,在以原点为中心,r 为半径的圆 $D(0,r)$ 上定

义度量

$$\lambda_r(z)=\frac{2r}{r^2-z^2}.$$

显然,在 $D(0,r)$ 中任一点 z 上,其曲率均为 -1. 定义函数

$$v(z)=\frac{f*\rho(z)}{\lambda_r},$$

则在 $D(0,r)$ 上,v 是非负的连续函数. 由(1.6)式,$f*\rho(z)=\rho(f(z))\mid f'(z)\mid$ 在 $\overline{D}(0,r)$ 上是有界的,且当 $\mid z\mid\to r$ 时,$\frac{1}{\lambda_r}\to 0$. 所以,当 $\mid z\mid\to 0$ 时,$v\to 0$. 因此,v 只能在 $D(0,r)$ 中的某点 τ 处取到极大值 M,如能证明 $M\leqslant 1$,则在 $D(0,r)$ 上 $v\leqslant 1$ 成立. 令 $r\to 1^-$,即得(2.1)式.

若 $f*\rho(\tau)=0$,则 $v\equiv 0$,已无需再证. 故不妨假设 $f*\rho(\tau)>0$. 这时,$K(\tau,f*\rho)$ 是有意义的. 因此,由假设 $K(\tau,f*\rho)\leqslant -1$. 由于 $\ln v$ 在 τ 点处取极大值,故有

$$\begin{aligned}0\geqslant\triangle\ln v(\tau)&=\triangle\ln f*\rho(\tau)-\triangle\ln\lambda_r(\tau)\\&=-K(\tau,f*\rho)\cdot(f*\rho(\tau))^2+K(\tau,\lambda_r)(\lambda_r(\tau))^2\\&\geqslant(f*\rho(\tau))^2-(\lambda_r(\tau))^2,\end{aligned}$$

即得

$$\frac{f*\rho(\tau)}{\lambda_r(\tau)}\leqslant 1,$$

故 $M\leqslant 1$. 引理证毕.

若在 Ahlfors-Schwarz 引理中,$U\subseteq D(0,1)$,则可取 $\rho=\lambda$,这样就得到 Schwarz-Pick 引理. 所以,Ahlfors-Schwarz 引理为 Schwarz-Pick 引理的推广.

还可以将 Ahlfors-Schwarz 引理写成更一般的形式.

在 $D(0,\alpha)$ $(\alpha>0)$ 上定义度量

$$\lambda_\alpha^A(z)=\frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-\mid z\mid^2)},\tag{2.3}$$

这里,$A>0$,则这个度量在 $D(0,\alpha)$ 中任一点,其曲率均为 $-A$.

定理 2(一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理) 假设 $f(z)$ 为 $D(0,\alpha)$ 上的全纯函数,将 $D(0,\alpha)$ 映为 U. 如在 U 上可以引入一个度量 ρ,即 $\mathrm{d}s_\rho{}^2=(\rho(z))^2\mid \mathrm{d}z\mid^2$,使得其曲率在 U 上任一点都小于等于 $-B$,则

$$f*\rho(z)\leqslant\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_\alpha^A(z)\tag{2.4}$$

对每个 $z\in D(0,\alpha)$ 都成立,这里,B 为正的常数.

定理 2 的证明与定理 1 的证明一样,从略.

Ahlfors-Schwarz 引理也是微分几何中比较定理的开始之一.

应用 Ahlfors-Schwarz 引理可以得到很多重要的结果,例如推广的 Liouville 定理等.

5.3 Liouville 定理的推广及值分布

第 2 章 2.3 节中的定理 8 为重要的 Liouville 定理:任意有界整函数必为常数.现在应用 Ahlfors-Schwarz 引理,可以用曲率来刻画与推广 Liouville 定理.

定理 3(推广的 Liouville 定理) 若整函数 $f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到 U. 如在 U 上可以引入一个度量 $\rho(z)$,使得对任意 $z \in U$,其曲率 $K(z,\rho)$ 满足 $K(z,\rho) \leqslant -B < 0$,这里,$B$ 为正的常数,则 $f(z)$ 必为常数.

证明 对任意 $\alpha > 0$,$f(z)$ 将 $D(0,\alpha)$ 映到 U 之内. 由假设,可在其上定义度量 ρ,使得其曲率 $K(z,\rho) \leqslant -B < 0$. 故由定理 2,有

$$f * \rho(z) \leqslant \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \lambda_\alpha^A(z).$$

由(2.3) 式,当 $\alpha \to \infty$ 时,$\lambda_\alpha^A(z) \to 0$,故得 $f * \rho(z) \leqslant 0$. 所以 $f * \rho(z) = 0$. 由于 $f(z)$ 为全纯函数,因此 f 必为常数. 定理证毕.

由定理 3 可以导出 Liouville 定理.

若 $f(z)$ 为有界整函数,所以可以找到一个正的常数 M,使得 $|f(z)| \leqslant M$ 当 $z \in \boldsymbol{C}$ 时都成立. 于是,全纯函数 $\frac{1}{M}f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映射到 $D(0,1)$ 之内. 而在 $D(0,1)$ 上显然可以取度量 λ,其曲率为 -1. 故在定理 3 中取 $B = 1$,即得 $\frac{1}{M}f(z)$ 必为常数,此即 $f(z)$ 必为常数,这就证明了 Liouville 定理.

由此可见,定理 3 是 Liouville 定理的微分几何形式的推广.

由 Liouville 定理知道:若整函数 $w = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到有界域,则 $f(z)$ 必为常数. 若整函数 $w = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到无界域 U,如 $\boldsymbol{C} \backslash U$ 的面积大于零,那么仍可证明:$f(z)$ 必为常数. 这可证明如下:若 $c_1 \in \boldsymbol{C} \backslash U$,且为内点. 作变换 $w_1 = w - c_1$,则 $w_1 = 0$ 位于 $f(\boldsymbol{C}) - c_1$ 的余集中,作变换 $w_2 = \frac{1}{w - c_1}$,则 w_2 将 $\boldsymbol{C}$ 映到有界域,

于是 w_2 为常数 c_2. 由 $c_2 = \dfrac{1}{w - c_1}$，即得 w 也是一个常数.

再进一步，若整函数 $w = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映射到无界域 U，而 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 的面积为零，即 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 是由一些曲线组成的，这时候 $f(z)$ 是否仍为常数?

我们来看看下面的例子.

若整函数 $w = u + \mathrm{i}v = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映为 $\boldsymbol{C}\setminus\{u + \mathrm{i}0 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1\}$. 作变换

$$w_1 = u_1 + \mathrm{i}v_1 = \varphi(w) = \frac{w}{w - 1},$$

将 $\boldsymbol{C}$ 映为 $\boldsymbol{C}\setminus\{u_1 + \mathrm{i}0 \mid u_1 \leqslant 0\}$. 作变换 $w_2 = r(w_1) = \sqrt{w_1}$，这里开根号取主分支，则 w_2 将 $\boldsymbol{C}$ 映为右半平面. 再作 Cayley 变换 $w_3 = \dfrac{w_2 - 1}{w_2 + 1} = s(w_2)$，将右半平面映为单位圆. 于是，由 Liouville 定理，w_3 是常数，这导出 w_2，w_1 及 w 均为常数.

由此可见，整函数 $w = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到无界域 U，即使 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 是一个线段，这个整函数仍可为常数. 不但如此，显然可见，我们可以取这个线段的长度为任意小的正数，这时候 $f(z)$ 仍为常数.

那么 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 多么小时，$f(z)$ 才不是常数?

考虑另一个极端的例子. 整函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映到 $U = \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$，所以如果 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 为一点的话，就有例子 $f(z)$ 不是常数. 那么如果 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 为两点的话，$f(z)$ 是不是常数呢?其回答就是 Picard 小定理.

5.4　Picard 小定理

定理 4(Picard 小定理)　若整函数 $w = f(z)$ 将 $\boldsymbol{C}$ 映为 U，而 $\boldsymbol{C}\setminus U$ 至少包含两点，则 $f(z)$ 必为常数.

也就是说，非常数的整函数取到 $\boldsymbol{C}$ 中所有的值，除了一个可能的例外点.

为了证明 Picard 小定理，先证如下的

定理 5　若 U 为 $\boldsymbol{C}$ 中的开集，$\boldsymbol{C}\setminus U$ 至少包含有两点，则在 U 上可以引入一个度量 μ，使得其曲率 $K(z,\mu)$ 在 U 的每一点上都满足

$$K(z,\mu) \leqslant -B < 0,$$

这里，B 为正的常数.

由定理 5 立即推出定理 4. 这是因为：若 $\boldsymbol{C}\backslash U$ 至少包含有两点，故由定理 5，可以在 U 上引入一个度量 μ，使得其曲率在 U 上每一点都满足 $K(z,\mu)\leqslant -B<0$，而 B 为正的常数，由推广的 Liouville 定理（定理 3）得到 $f(z)$ 必为常数.

定理 5 的证明 在 $\boldsymbol{C}\backslash U$ 中取两点，并用线性变换将这两点变为 0 与 1，记 $\boldsymbol{C}_{0,1}=\boldsymbol{C}\backslash\{0,1\}$，在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 上作度量

$$\mu(z)=\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\cdot\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}, \tag{4.1}$$

则 $\mu(z)$ 在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 上为正的、光滑的函数. 现在来计算 μ 的曲率，并证明其值为负的.

首先看到

$$\triangle \ln|z|^{5/6}=\frac{5}{12}\triangle\ln|z|^2=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\triangle\ln\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}&=\frac{1}{2}\triangle\ln(1+|z|^{1/3})\\&=2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\ln(1+(z\cdot\bar{z})^{1/6})\\&=\frac{1}{18|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2},\end{aligned}$$

同样可以得到

$$\triangle\ln\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}=\frac{1}{18|z-1|^{5/3}(1+|z-1|^{1/3})^2}.$$

于是曲率

$$K(z,\mu)=-\frac{1}{18}\left[\frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}+\frac{|z|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})(1+|z-1|^{1/3})^3}\right].$$

可以看出：

(1) $K(z,\mu)<0$，对于所有的 $z\in\boldsymbol{C}_{0,1}$；

(2) $\lim\limits_{z\to 0}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$；

(3) $\lim\limits_{z\to 1}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$；

(4) $\lim\limits_{z\to\infty}K(z,\mu)=-\infty$.

故 $K(z,\mu)$ 在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 上有一个负常数 $-B$ 作为其上界，这就证明了定理 5.

以下还要证明更为深刻的 Picard 大定理，这是 Picard 小定理的深化. 为了证明 Picard 大定理，下面来推广正规族的概念.

5.5　正规族的推广

在第4章4.2节中引入了正规族的概念，并用此来证明 Riemann 映射定理．现在来推广这个概念．

定义1　若$\{g_j\}$为域Ω上的复值函数序列（函数未必全纯），若对任给的$\varepsilon>0$及Ω中任一紧致集K，一定存在一个只依赖于ε及K的正整数J，使得当$j>J$时

$$|g_j(z)-g(z)|<\varepsilon$$

对任意的$z\in K$都成立，则称$\{g_j\}$在Ω上**正规收敛**(normally convergence)．

即若$\{g_j\}$在Ω上内闭一致收敛，则称$\{g_j\}$在Ω上正规收敛．

若对Ω中的任一紧致集K，及$\mathbf{C}$中的任一紧致集L，一定存在一个只依赖于K及L的正整数J，使得当$j>J$时，$g_j(z)\notin L$对任意的$z\in K$都成立，则称$\{g_j\}$在Ω上为**紧发散**(compactly divergence)．

即若$\{g_j\}$在Ω上任一紧集上一致发散到∞，则称$\{g_j\}$为紧发散．

定义2　若$\mathscr{F}$为域Ω上的复值函数族．如果$\mathscr{F}$中任一序列或者有子序列正规收敛，或者有子序列紧发散，则称$\mathscr{F}$为**正规族**．

这是第4章4.2节中正规族定义的推广．

例　$\mathscr{F}=\{f_j\mid f_j=z^j(j=1,2,\cdots)\}$．

$\mathscr{F}$在$D(0,1)$上是正规族，因任一子序列正规收敛于零．

$\mathscr{F}$在$\{z\mid |z|>1\}$上是正规族，因任一子序列紧发散．

$\mathscr{F}$在任一包含有单位圆周$|z|=1$上任一点作为内点的区域上不是正规族，因为任一子序列在圆内的点上收敛于零，在圆外的点上发散．

由上述定义，立得

定理6(Montel定理)　若$\mathscr{F}$为域Ω上的全纯函数族．若对Ω中任一紧致集K，存在常数M_K，使得

$$|f(z)|\leqslant M_K \tag{5.1}$$

对每个$z\in K$，$f\in\mathscr{F}$都成立，则$\mathscr{F}$为正规族．

如果$|f(z)|\leqslant M$对所有$z\in\Omega$，$f\in\mathscr{F}$都成立，这里，M为常数，那么定理依然成立．

由于$\mathscr{F}$为全纯函数族,且满足条件(5.1),故不可能有紧发散.所以由第4章4.2节定理3(Montel定理),上述定理成立.

为了推广正规族概念到亚纯函数族,我们用S^2上的球距离来替代$\boldsymbol{C}$上的欧氏距离.这时候,$\boldsymbol{C}^*$上的亚纯函数族是正规族可定义如下:

定义3 若$\mathscr{F}$为域$\Omega \subset \boldsymbol{C}^*$上的亚纯函数族.如果$\mathscr{F}$中任一序列一定存在一个子序列,在$\Omega$上球距离的意义下是正规收敛的,则称$\mathscr{F}$为正规族.

这个定义的形式与第4章4.2节中正规族的定义(定义1)是相一致的,只是用球距离替代了欧氏距离.

可以看出,定义2相容于定义3,这只要用球距离来替代欧氏距离即可.

与Montel定理(定理6)相仿,可以有如下的Marty定理:

定理7(Marty判别法) 若$\mathscr{F}$为域Ω上的亚纯函数族,则$\mathscr{F}$为正规族当且仅当

$$\{f * \sigma \mid f \in \mathscr{F}\} \tag{5.2}$$

在Ω的任一紧致集上一致有界,这里,σ为球度量,即对Ω中任一紧致集K,存在常数M_K,使得

$$\frac{2 \mid f'(z) \mid}{1 + \mid f(z) \mid^2} \leqslant M_K \tag{5.3}$$

对任意$z \in K, f \in \mathscr{F}$都一致成立.

证明 (5.2)式在Ω的任一紧致集上一致有界与(5.3)式等价是显然的.

如(5.3)式成立,则

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &= \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \mathrm{d}s \\ &= \inf_{\gamma'} \int_{\gamma'} \frac{2 \mid f'(z) \mid}{1 + \mid f(z) \mid^2} \mid \mathrm{d}z \mid \\ &\leqslant \int_{\gamma_0} \frac{2 \mid f'(z) \mid}{1 + \mid f(z) \mid^2} \mid \mathrm{d}z \mid \\ &\leqslant M_K \mid z_1 - z_2 \mid, \end{aligned}$$

这里,γ是连接$f(z_1), f(z_2)$且全在K中的曲线,γ'为$f^{-1}(\gamma)$,γ_0为从z_0到z_1的直线段.故在球距离的意义下,$\mathscr{F}$是等度连续的.而球面距离是有限距离,故$\mathscr{F}$是一致有界的.故由Ascoli-Arzela定理(第4章4.2节定理4),$\mathscr{F}$为一正规族.

反之,如$\mathscr{F}$为正规族,要导出(5.3)式成立.我们用反证法.如果(5.3)式不成立,则在Ω中存在紧致集E及$\mathscr{F}$中的序列$\{f_n\}$,使得$\max\limits_{z \to E} f_n * \sigma(z)$无界.由于$\mathscr{F}$为正规族,故在$\{f_n\}$中存在子序列$\{f_{n_k}\}$,使得当$n_k \to \infty$时,$f_{n_k} \to f$在$E$上一致成立.在$E$中的每一点,可以有一闭圆$\overline{D} \subset \Omega$,在$\overline{D}$中或者$f$是全纯的,或者$\frac{1}{f}$是全

纯的. 若 f 为全纯的，则在 $\overline{D}$ 上有界，由于 $\{f_{n_k}\}$ 是在球距离意义下收敛的，故当 n_k 充分大时，$\{f_{n_k}\}$ 在 $\overline{D}$ 内无极点. 由第 3 章 3.1 节定理 1(Weierstrass 定理)，$f_{n_k} * \sigma$ 在比 $\overline{D}$ 小一点的圆上一致收敛到 $f * \sigma$. 由于 $f * \sigma$ 是连续函数，故 $f_{n_k} * \sigma$ 在小一点的圆上是有界的. 同样，若 $\frac{1}{f}$ 是全纯的，用同样的方法可证 $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right) * \sigma$ 在小一点的圆上是有界的，但是 $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right) * \sigma = f_{n_k} * \sigma$，故仍得 $f_{n_k} * \sigma$ 在小一点的圆上是有界的. 由于 E 为紧致集，故可以用有限个这样的小圆来覆盖. 这样可以得到 $f_{n_k} * \sigma$ 在 E 上是有界的，得到矛盾.

由 Marty 判别法，可以导出如下的 Montel 定理：

定理 8(Montel 定理)　若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的亚纯函数族，P, Q, R 为三个不同的点. 如果 $\mathscr{F}$ 中的任一函数取值于 $\boldsymbol{C}^* \setminus \{P, Q, R\}$，则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

证明　用分式线性变换将 P, Q, R 三点变为 $P = 0, Q = 1$ 及 $R = \infty$. 于是只要证明：全纯函数族中任一函数如不取 $P = 0, Q = 1$，则此函数族为正规族. 即在 $\boldsymbol{C}_{0,1} = \boldsymbol{C} \setminus \{0,1\}$ 上取值的全纯函数族成正规族. 这只要证明：对 Ω 中任一圆 $D(z_0, \alpha) = \{z \mid |z - z_0| < \alpha\}$，$\mathscr{F}$ 成为正规族即可，且不妨设 $z_0 = 0$. 在 5.4 节中已经构造了度量 μ，将 μ 乘以常数 a(仍记作 μ)，使得其曲率的上界为 -1. 由 5.2 节中一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理(定理 2)，得到：对于任一 $f \in \mathscr{F}$，有

$$f * \mu(z) \leqslant \lambda_\alpha^A(z),$$

即

$$\mu(f(z)) \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \right| \leqslant \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)} \tag{5.4}$$

对每个 $z \in D(0, \alpha)$ 都成立.

将球度量 $\sigma(w)$ 与 $\mu(w)$ 在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 中做比较. 显然，当 $w \to 0$，或者 $w \to 1$，或者 $w \to \infty$ 时

$$\frac{\sigma(w)}{\mu(w)} = \frac{\dfrac{2}{1 + |w|^2}}{\dfrac{a(1 + |w|^{1/3})^{1/2}(1 + |w - 1|^{1/3})^{1/2}}{|w|^{5/6}\,|w - 1|^{5/6}}} \to 0.$$

故存在正的常数 M，使得 $\sigma(w) \leqslant M\mu(w)$. 于是由(5.4)式，当 $z \in D(0, \alpha)$ 时

$$\begin{aligned} f * \sigma(z) &= \sigma(f(z)) \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \right| \\ &\leqslant M\mu(f(z)) \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \right| = Mf * \mu(z) \end{aligned}$$

$$\leqslant M\lambda_{\alpha}^{A}(z) = \frac{2\alpha M}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}$$

成立.故 $f * \sigma$ 在 $D(0,\alpha)$ 的紧致集上有界,且界不依赖于 $f \in \mathscr{F}$.由 Marty 判别法(定理 7),导出 $\mathscr{F}$ 为正规族.

在证明过程中,还证明了

定理 9(Montel 定理) 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的全纯函数族,对 $\mathscr{F}$ 中的每一个函数,如均不取相同的两个复数,则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

5.6 Picard 大定理

第 3 章 3.2 节定理 3 为 Weierstrass 定理:若 $f(z)$ 在 $D'(0,r) = D(0,r)\setminus\{0\}$ 中全纯,而 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点,则 $f(z)$ 在 $D'(0,r)$ 中能取到的值在 $\boldsymbol{C}$ 中是稠密的.

Picard 大定理将进一步刻画函数在本性奇点附近的值分布.

定理 10(Picard 大定理) 若 $f(z)$ 在 $D'(0,r)$ 中全纯,而 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点,则 $f(z)$ 在 $z = 0$ 点的任意邻域中可取到 $\boldsymbol{C}$ 中任意的值,最多除去一个例外点.当然,以任一点 z 来替代 $z = 0$,结论依然成立.

显然,Picard 大定理是 Weierstrass 定理的深化,也是 Picard 小定理的推广.

在第 3 章 3.3 节中已经知道,若 $f(z)$ 为整函数,且 $f(z)$ 在无穷远点处为极点,则 $f(z)$ 为多项式.由代数基本定理(第 2 章 2.4 节定理 10),$f(z)$ 可以取 $\boldsymbol{C}$ 中任何值.若 $f(z)$ 在无穷远点处为可去奇点,则 $f(z)$ 为有界整函数,由 Liouville 定理,$f(z)$ 必为常数.若 $f(z)$ 在无穷远点处为本性奇点,则由 Picard 大定理,$f(z)$ 在无穷远点附近可以取 $\boldsymbol{C}$ 中的任何值,最多除去一个例外点,这就导出了 Picard 小定理.

因此,Picard 小定理是 Picard 大定理的推论.

现在应用上节的结果,来证明 Picard 大定理.

定理 10 的证明 用反证法.若 Picard 大定理不成立,不妨设 $f(z)$ 在 $D'(0,1)$ 上全纯,f 将 $D'(0,1)$ 映到的区域不取 0,1 两点,来证明 $z = 0$ 必为 $f(z)$ 的可去奇点或极点,这样就得到矛盾.

定义 $f_n(z) = f\left(\dfrac{z}{n}\right)$ $(0<|z|<1)$,作全纯函数族 $\mathscr{F} = \{f_n\}$,$\mathscr{F}$ 取值于 $\boldsymbol{C}_{0,1}$.

由定理 9，$\mathscr{F}$ 为正规族．因此，在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_k}\}$，或者正规收敛，或者紧发散．若 $\{f_{n_k}\}$ 是正规收敛的，则 $\{f_{n_k}\}$ 在 $D'(0,1)$ 的任一紧致集上一致收敛，故有界．特别在 $\left\{z \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2}\right\}$ 上有界 M，此即 $f(z)$ 在 $\left\{z \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2n_k}\right\}$ 上有界 M．由最大模原理，f 在 $0 < |z| < \frac{1}{2}$ 上有界 M，故 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点(第 2 章 2.3 节定理 9)．

若 $\{f_{n_k}\}$ 为紧发散的，则用同样的办法可证：当 $z \to 0$ 时 $\frac{1}{f} \to 0$，即当 $z \to 0$ 时 $f \to \infty$，故 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的极点．这就证明了定理．

尽管 Picard 大定理与 Picard 小定理是复分析尤其是值分布理论中最为重要的定理之一，但是一般大学基础课教材中不讲这些定理，原因是这些定理的证明要用到椭圆模函数，比较困难．自从 Picard 定理证明后，有不少简化的证明，本章选用了微分几何的证明．L. V. Ahlfors[2] 于 1938 年建立起极为重要的 Ahlfors-Schwarz 引理(定理 1)，1939 年 R. M. Robinson[1] 就沿着这个想法，用微分几何的方法，而不用椭圆模函数来证明 Picard 定理等．之后就有不少进展，如 H. Grauert and H. Reckziegel[1]，Z. Kobayashi[1]，L. Zalcman[1]，D. Minda and G. Schober[1] 以及 S. G. Krantz[1] 等人的工作．本章就是参考了上述文献，尤其是 Minda 与 Schober 以及 Krantz 的工作后写成的．这种写法的好处，不仅是使得 Picard 定理的证明简单明了，而且也开始了解了如何用微分几何来处理复分析的问题．不但如此，这里用微分几何来证明 Picard 大定理、Picard 小定理的方法，还可以用来证明其他一些复分析中的重要定理，如 Bloch 定理、Landau 定理、Schottky 定理等等．现在叙述 Bloch 定理、Landau 定理及 Schottky 定理如下，而不给出证明，有兴趣的读者可参阅上述文献以及 L. V. Ahlfors[2,3]，J. B. Conway[1]．

Bloch 定理　若 $f(z)$ 在单位圆盘 D 上全纯，且 $f'(0) = 1$，则 $f(D)$ 一定包有一个以 B 为半径的圆，这里，B 是一个不依赖于 f 的正的常数．

Landau 定理　若 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ $(a_1 \neq 0)$ 为 $D(0,r)$ 上的全纯函数，f 不取 0，1 两点，则 $r \leqslant R(a_0, a_1)$，这里，$R(a_0, a_1)$ 为只依赖于 a_0，a_1 的常数．

Schottky 定理　若 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ 为 $D(0,r)$ 中的全纯函数，f 不取 0，1 两点，则对每个 $\theta \in (0,1)$，存在只依赖于 a_0 及 θ 的常数 $M(a_0, \theta)$，使得 $|f(z)| \leqslant M(a_0, \theta)$ 对所有 $|z| \leqslant \theta r$ 都成立．

还可证明：由 Bloch 定理也可导出 Picard 小定理，由 Schottky 定理也可导出 Picard 大定理．

在证明Picard小定理及Picard大定理的过程中，我们在$C_{0,1}$上构造了度量μ，这是证明过程中很关键的一步．对这个度量，要求其曲率有负的上界，且存在正的常数M，使得$\sigma \leqslant M\mu$成立．满足这种性质的μ当然不只是本章中给出的(4.1)式这一个，还可以构造出其他的度量也满足上述要求，有兴趣的读者可参阅R. M. Robinson[1]．

习 题 5

1．证明：$\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$，这里，$z = re^{i\theta}$．

2．证明定理2．

3．证明：欧氏度量是在欧氏运动群下的不变量．

4．若$P = (x_1, x_2, x_3)$及$P' = (x_1', x_2', x_3')$为Riemann球面上的两点，证明：过P, P'的大圆上的圆弧$\overset{\frown}{PP'}$的弧长为

$$d(P,P') = 2\arctan\sqrt{\frac{1 - x_1x_1' - x_2x_2' - x_3x_3'}{1 + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'}}.$$

若z, z'为P, P'的球面投影的对应的点，利用(1.5)式，这又等于

$$d(z,z') = 2\arctan\left|\frac{z - z'}{1 + z\bar{z}'}\right|,$$

并证明其相应的度量为

$$ds^2 = \frac{4\,|\,dz\,|^2}{(1 + |\,z\,|^2)^2}.$$

5．验证：欧氏度量的曲率为0，Poincaré度量的曲率为-1，球度量的曲率为1．

6．验证Picard小定理对函数e^z的正确性．

7．函数$e^z + 1$的例外值是什么？

8．证明$\cosh z$与$\sinh z$能取所有的复数值．

9．在$z = 0$点附近，对函数$e^{\frac{1}{z}}$验证Picard大定理．

附录 曲 率

有关三维欧氏空间中曲面的曲率的介绍，可以在任何一本大学的微分几何的教材中找到. 这里做一简单介绍备用. 如已学过，可略去.

设 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 为域，$(u, v) \in D$. 若

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \boldsymbol{R}^3,$$

且 x, y, z 具有 u, v 的二阶连续偏导数，$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$，这里，$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 分别表示 $\boldsymbol{r}$ 对 u，v 的偏导数. 于是，$S = \boldsymbol{r}(D)$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一张曲面. (u, v) 称为 S 的参数. 若 $(u, v) \in D$，则 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 为 S 上一点 P，$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 组成 S 在 P 点的切平面 T_PS 的基. 曲面 S 的**第一基本形式**为

$$\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 = \mathrm{d}s^2,$$

这里，$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u$，$F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v$，$G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v$. 这表示微小向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$ 的长度的平方.

若点 Q: $\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ 为 P 点的一个邻近点，于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v) \\ &= \boldsymbol{r}_u\Delta u + \boldsymbol{r}_v\Delta v + \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}_{uu}(\Delta u)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\Delta u\Delta v + \boldsymbol{r}_{vv}(\Delta v)^2] + \cdots,\end{aligned}$$

这里，$\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vv}$ 分别表示 $\boldsymbol{r}$ 对 u 的二阶偏导数、$\boldsymbol{r}$ 对 u 与 v 的二阶偏导数以及 $\boldsymbol{r}$ 对 v 的二阶偏导数. 于是，Q 点到 T_PS 的有向距离为

$$\delta = \overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}_{uu}(\Delta u)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\Delta u\Delta v + \boldsymbol{r}_{vv}(\Delta v)^2] + \cdots,$$

这里，$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$ 表示曲面 S 在 P 点的法向量，而未写的部分表示 $\Delta u, \Delta v$ 的高阶项. 取 2δ 的主要部分为曲面 S 的**第二基本形式**：

$$\mathrm{II} = L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2,$$

这里

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}, \quad M = \frac{\boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}, \quad N = \frac{\boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0$，$\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$，两边分别对 u, v 求导，便可得到

$$\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=0,$$
$$\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0.$$

由此可得 $\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}$.第二基本形式描述了曲面在 P 点附近弯曲的状况.

重要的是:Ⅰ 与 Ⅱ 都是几何不变量,即曲面 S 如果用另一组参数$(\overline{u},\overline{v})\in D$来表示,则 Ⅰ 与 Ⅱ 是不变的.曲线论的基本定理是:任何可微函数 $f(x)>0$ 和 $g(x)$ 可以分别作为曲率和挠率,在给定的初始条件下,确定唯一的一条曲线.而在曲面论中,任给六个函数,如果满足一定条件(Gauss 方程与 Codazzi 方程),那么以这六个函数分别作为第一和第二基本形式的曲面一定存在,除空间的一个运动外,是唯一的.这是曲面论的基本定理.

若 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为以弧长为参数且过 P 点的在曲面S 上的一条曲线C,则

$$\boldsymbol{T}(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

为曲面 S 上 P 点的单位切向量,而

$$\boldsymbol{T}'(s)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+\boldsymbol{R}$$

为与 $\boldsymbol{T}(s)$ 相垂直的法向量,这里,$\boldsymbol{R}$ 为S 在点P 的某一切向量.若 $\boldsymbol{N}(s)$ 为曲线 C 在 P 点的单位法向量,则 $T'(s)=k\boldsymbol{N}(s)$.于是称

$$k_n=k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

为曲线 C 在P 点的**法曲率**,这里,$\boldsymbol{n}$ 为曲面S 在P 点的单位法向量.显然

$$k_n=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2},$$

即第二基本形式与第一基本形式之商.k_n 与方向 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 有关.使 k_n 取得极值(极大值或极小值)的方向称为曲面在该点的主方向,k_n 在主方向取得的极值称为曲面在该点的**主曲率**.一般地,在曲面的任何一点可以定义两种曲率,一种叫 **Gauss 曲率**(也叫总曲率)K,即两个主曲率的乘积;另一种叫**平均曲率** H,即两个主曲率的算术平均值.现在来计算这两个曲率.

显然,$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$是正定方阵.可以证明:

(1) $\det\left(\lambda\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\right)=0$ 有两个实根 λ_1,λ_2;

(2) 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则存在 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$,使得

$$A\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}A' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}A' = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

成立,这里,A' 表示 A 的转置.

记$(\mathrm{d}\overline{u},\mathrm{d}\overline{v}) = (\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)A^{-1}$,则

$$k_n = \frac{\lambda_1(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + \lambda_2(\mathrm{d}\,\overline{v})^2}{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + (\mathrm{d}\,\overline{v})^2}.$$

令 $\overline{\lambda} = \max(\lambda_1,\lambda_2)$,$\underline{\lambda} = \min(\lambda_1,\lambda_2)$,则

$$\begin{aligned} k_n &= \overline{\lambda} - (\overline{\lambda} - \lambda_1)\frac{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2}{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + (\mathrm{d}\,\overline{v})^2} - (\overline{\lambda} - \lambda_2)\frac{(\mathrm{d}\,\overline{v})^2}{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + (\mathrm{d}\,\overline{v})^2}\\ &= \underline{\lambda} + (\lambda_1 - \underline{\lambda})\frac{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2}{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + (\mathrm{d}\,\overline{v})^2} + (\lambda_2 - \underline{\lambda})\frac{(\mathrm{d}\,\overline{v})^2}{(\mathrm{d}\,\overline{u})^2 + (\mathrm{d}\,\overline{v})^2}. \end{aligned}$$

因此,$\underline{\lambda}\leqslant k_n\leqslant\overline{\lambda}$ 对任意方向 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 都成立.而可以证明,的确存在方向,以 λ_1,λ_2 为法曲率,所以,λ_1,λ_2 为主曲率.于是得到 $K = \lambda_1\lambda_2$,$H = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.由(1)即得

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\quad H = \frac{1}{2}\cdot\frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时,可证上式依然成立.

在微分几何中,曲率是最为重要的讨论对象,尤其是 Gauss 曲率.如果说到曲率,一般指的是 Gauss 曲率.

现在来计算 S 的第一基本形式,即度量为 $\mathrm{d}s^2 = \rho^2(\mathrm{d}u)^2 + \rho^2(\mathrm{d}v)^2$ 时的 Gauss 曲率.此时,$E = G = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v = \rho^2$,$F = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = 0$.于是

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2 = (\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2 = \rho^4,$$

即 $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v| = \rho^2$.而

$$LN = \frac{1}{\rho^4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \rho^2 & 0\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & 0 & \rho^2\end{vmatrix},$$

$$M^2 = \frac{1}{\rho^4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \rho^2 & 0\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & 0 & \rho^2\end{vmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v = \rho^2$,$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = 0$ 分别对 u,v 求偏导数,可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u = \rho\rho_u, && \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_u = \rho\rho_v, && \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v = \rho\rho_u,\\ &\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{r}_v = \rho\rho_v, && \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v = -\rho\rho_v, && \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{r}_u = -\rho\rho_u, \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{r}_{uuv}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=-\rho_v{}^2-\rho\rho_{vv},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{r}_{uuv}\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=\rho_u{}^2+\rho\rho_{uu},$$

由此可得

$$\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=-(\rho_u{}^2+\rho_v{}^2)-\rho\triangle\rho.$$

将这些结果代入 LN 及 M^2 的行列式表达式中，即得

$$\begin{aligned}LN-M^2&=\frac{1}{\rho^4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}&\rho\rho_u&-\rho\rho_v\\-\rho\rho_u&\rho^2&0\\\rho\rho_v&0&\rho^2\end{vmatrix}-\frac{1}{\rho^4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}&\rho\rho_v&\rho\rho_u\\\rho\rho_v&\rho^2&0\\\rho\rho_u&0&\rho^2\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}+\rho_u{}^2+\rho_v{}^2-\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}+\rho_u{}^2+\rho_v{}^2\\&=\rho_u{}^2+\rho_v{}^2-\rho\triangle\rho.\end{aligned}$$

而 $EG-F^2=\rho^4$. 因此，Gauss 曲率此时为

$$\frac{\rho_u{}^2+\rho_v{}^2}{\rho^4}-\frac{\triangle\rho}{\rho^3}=-\frac{1}{\rho^2}\triangle\ln\rho.$$

第6章　多复变数函数浅引

6.1　引　言

在本书的最后一章讲一点点多复变数函数，是为了让读者看到单复变数函数论与多复变数函数论之间的一些根本差别，从而达到对单复变数函数论有更深入一步理解的目的.

如同其他的数学理论那样，从一维推广到高维，其中一部分是可以没有多大困难平行推广过去的，还有一部分是在高维情形下所特有的，在一维情形下是没有的，而后一部分往往是要着重讨论的.

多复变数函数论的研究如同单复变数函数论的研究那样，已有很长的历史.20世纪开始前后，多复变数的两个重要定理的发现，掀开了多复变数函数论发展的崭新的一页，这两个定理是 Poincaré 定理及 Hartogs 定理. Poincaré 定理说：不存在双全纯映射将 $\boldsymbol{C}^n(n\geqslant 2)$ 中的单位球映为多圆柱，这里，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\boldsymbol{C}^n$，单位球定义为 $B(0,1)=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$，多圆柱定义为 $D^n(0,1)=\{z\in\boldsymbol{C}^n \mid |z_1|<1,\cdots,|z_n|<1\}$. 映射 $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$ 称为在域(连通开集)$\Omega\subseteq\boldsymbol{C}^n$ 上全纯，若每个 $f_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 在域 Ω 上是全纯函数. 函数 $g(z)=g(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 称为在域 $\Omega\subseteq\boldsymbol{C}^n$ 上全纯，若固定任意 $n-1$ 个变数，$g(z)$ 是余下那个变数的全纯函数. 全纯映射称为是**双全纯**的(biholomorphic)，如果映射是一一的，且映上，且 f^{-1} 也是全纯的(最后一个要求是多余的，但证明复杂). Poincaré 定理说，在高维(维数 $\geqslant 2$) 的情形下，第 4 章中的 Riemann 映射定理是不成立的. Hartogs 定理说：在 $\boldsymbol{C}^n(n\geqslant 2)$ 中存在这样的区域，当函数在该区域上全纯时，一定在一个比它更大一些的区域上全纯. 也就是说，

在 $C^n(n \geqslant 2)$ 中存在这样的区域，如函数在该区域上全纯，一定可以全纯开拓到一个更大一些的区域上去. 这个现象在单复变数时是不存在的，由 Hartogs 定理立即产生一个根本性的问题：我们应该在怎样的区域上讨论函数论？

经过两百多年的努力，单复变数函数论已经成熟，而人们对多复变数函数论的了解只是开始.

在这一章中，先叙述一些可以从单复变数函数论并不困难地推广到多复变数函数论的结果，然后来证明 Poincaré 定理及 Hartogs 定理，以作为对多复变数函数论进行理解的敲门砖. 为简单起见，这里只讨论两个复变数的情形，即在 $C^2 = C \times C$ 中讨论，而对 Hartogs 定理也只是在特殊情形下证明.

以下的这些定理只叙述结果而不证明，其证明的方法与单复变数的情形是相仿的，读者可参照单复变数的相应定理的证明来证明这些定理.

定理 1(Cauchy 积分公式) 设 $w = (w_1, w_2) \in C^2, r > 0, D^2(w, r) = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 \mid |z_1 - w_1| < r, |z_2 - w_2| < r\}$ 为以 w 为中心、以 r 为半径的双圆柱，若 $f(z)$ 在 $\overline{D}^2(w, r)$ 上全纯，则

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D(w_1, r)}\int_{\partial D(w_2, r)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{1.1}$$

对任意的 $z \in D^2(w, r)$ 都成立.

这只要应用两次单复变数全纯函数的 Cauchy 积分公式即可得到.

如同单复变数的情形一样，由(1.1)式立即得到 $f(z)$ 的任意次偏导数都存在，且有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(z) = \frac{j!k!}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D(w_1, r)}\int_{\partial D(w_2, r)} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)^{j+1}(\zeta_2 - z_2)^{k+1}} d\zeta_1 d\zeta_2,$$

这里，j, k 为任意非负整数. 由此立即得到 Cauchy 不等式

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(z)\right| \leqslant \frac{Mj!k!}{r^{j+k}},$$

这里，$M = \sup\limits_{\substack{|\zeta_1 - z_1| = r \\ |\zeta_2 - z_2| = r}} |f(\zeta)|$，其中 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$.

如同单复变数的情形一样，如果 $f(z)$ 在 $\overline{D}^2(w, r)$ 的邻域上全纯，则 $f(z)$ 可以展开成 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}(z_1 - w_1)^j (z_2 - w_2)^k,$$

且在 $\overline{D^2}(w, r)$ 绝对一致收敛，其中

$$a_{jk} = \frac{1}{j!k!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(w).$$

如同单复变数的情形一样，可以证明

定理 2　若 $f(z)$ 在域 $U \subseteq \boldsymbol{C}^2$ 上全纯，且在 U 中的一个开集上 $f(z)$ 等于零，则 $f(z)$ 在 U 上恒等于零.

定理 3(最大模原理)　若 U 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的有界域，$f(z)$ 在 U 上全纯，$M = \sup\limits_{\zeta \in \partial U} \varlimsup\limits_{\substack{z \to \zeta \\ z \in U}} |f(z)|$，则 $|f(z)| < M$ 对所有 $z \in U$ 都成立，除去 f 是常数的情形.

同样，也有类似于第 3 章 3.1 节定理 1 的 Weierstrass 定理.

定理 4(Weierstrass 定理)　若 Ω 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的域，$\{f_n\}$ 为 Ω 上的全纯函数序列，且在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛，则 $f = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ 在 Ω 上全纯，且 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f_n\right\}$ 在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛到 $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f$.

也可以有类似于第 4 章 4.2 节定理 3 的 Montel 定理.

定理 5(Montel 定理)　若 $\mathscr{F} = \{f_n\}$ 为 $\Omega \subseteq \boldsymbol{C}^2$ 上的全纯函数族，且存在 $M > 0$，使得 $|f(z)| \leqslant M$ 对所有 $z \in \Omega, f \in \mathscr{F}$ 都成立，则 $\mathscr{F}$ 中任一序列 $\{f_n\}$ 一定有子序列在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛，即 $\mathscr{F}$ 为一正规族.

6.2　Cartan 定理

在第 2 章 2.5 节中我们定出了单位圆上的全纯自同构群，现在要来定出 $\boldsymbol{C}^2$ 中的单位球及双圆柱上的全纯自同构群，并借此来证明 Poincaré 定理.

回顾在定出单位圆上的全纯自同构群时，主要是应用了 Schwarz 引理. 在多复变数的情形，我们要应用推广了的 Schwarz 引理，在这里是 Cartan 的两条定理.

定理 6(Cartan 定理)　若 $U \subseteq \boldsymbol{C}^2$ 为有界域，$P \in U$，若 $f = (f_1, f_2)$ 为全纯映射，将 U 映入到 U，且 $f(P) = P$，$J_f(P) = I$，则 $f(z) \equiv z$，这里，$J_f(z)$ 为 f 在 z 点的 Jacobi 矩阵，即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{pmatrix};$$

I 为单位方阵，即

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 不妨设 $P = 0$,用反证法. 如果定理不成立,则 $f(z)$ 在0点可以展开成 Taylor 级数

$$f(z_1, z_2) = z + A_m(z) + \cdots,$$

这里,$A_m(z) = (A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)}(z))$ 为第一个出现不为 0 的项,$A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)}(z)$ 为 m ($m \geqslant 2$) 次齐次多项式.

记 $f^1 = f, f^2 = f \circ f, \cdots, f^j = f^{j-1} \circ f$ ($j \geqslant 2$). 于是

$$\begin{aligned} f^1(z) &= z + A_m(z) + \cdots, \\ f^2(z) &= f(z) + A_m(f(z)) + \cdots \\ &= z + A_m(z) + A_m(z) + \cdots \\ &= z + 2A_m(z) + \cdots, \\ &\cdots, \\ f^j(z) &= z + jA_m(z) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.1}$$

由于 U 是有界域,f 将 U 映入到 U,故由定理 5(Montel 定理),$\{f^j\}$ 为正规族. 即有子序列 $\{f^{j_l}\}$,当 $j_l \to \infty$ 时,$f^{j_l} \to F$. 由定理 4(Weierstrass 定理),f^{j_l} 的 m 阶导数在 0 点的值收敛到 F 的 m 阶导数在 0 点的值. 由(2.1)式,f^{j_l} 的 m 阶导数在 0 点的值当 $j_l \to \infty$ 时是趋于 ∞ 的. 另一方面,F 的 m 阶导数在 0 点的值不可能为 ∞,由此得到矛盾. 故 $A_m(z) \equiv 0$ 必须在 U 上成立,即 $f(z) \equiv z$.

这条 Cartan 定理,在单复变数的情形 U 为单位圆 D 时成为:若全纯函数 $f(z)$ 将 D 映入到 D,$f(0) = 0, f'(0) = 1$,则 $f(z) \equiv z$,即 Schwarz 引理等号成立的那部分.

下面来叙述并证明另一条 Cartan 定理.

若 $U \subseteq C^2$ 为域,称此域为**圆型域**(circular domain),若对任一点 $(z_1, z_2) \in U$,以及任意的复数 μ, $|\mu| < 1$,必有 $(\mu z_1, \mu z_2) \in U$.

定理 7(Cartan 定理) 若 $U \subseteq C^2$ 为有界圆型域,f 为将 U 映到 U 自身的双全纯映射,且 $f(0) = 0$,则 f 为线性映射,即 $f(z) = zA$,这里,A 为一常数方阵.

证明 令 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho_\theta(z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$. 考虑映射 $g = \rho_{-\theta} \circ f^{-1} \circ \rho_\theta \circ f$,则

$$J_g(0) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} J_{f^{-1}}(0) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} J_f(0) = I.$$

由于 $g(z)$ 将 U 映入到 U,且 $g(0) = 0, J_g(0) = I$,故由定理 6,$g(z) \equiv z$,此即

$$f \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ f. \tag{2.2}$$

将 f 在0点附近展开成收敛的幂级数

$$f(z) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} z_1{}^j z_2{}^k = \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(1)} z_1{}^j z_2{}^k, \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(2)} z_1{}^j z_2{}^k \right),$$

于是

$$\rho_\theta \circ f = (e^{i\theta} f_1, e^{i\theta} f_2) = \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(1)} e^{i\theta} z_1{}^j z_2{}^k, \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(2)} e^{i\theta} z_1{}^j z_2{}^k \right),$$

而

$$\begin{aligned} f \circ \rho_\theta &= \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(1)} (e^{i\theta} z_1)^j (e^{i\theta} z_2)^k, \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(2)} (e^{i\theta} z_1)^j (e^{i\theta} z_2)^k \right) \\ &= \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(1)} e^{i(j+k)\theta} z_1{}^j z_2{}^k, \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}^{(2)} e^{i(j+k)\theta} z_1{}^j z_2{}^k \right). \end{aligned}$$

由(2.2)式，比较系数，即得除去 $j+k=1$ 外所有 $a_{jk}=0$，即得 $f(z)$ 在0点附近为线性的．故由定理2，$f(z)$ 在整个 U 上为线性的．

这条 Cartan 定理，在单复变数的情形 U 为单位圆 D 时成为：若全纯单叶函数 $f(z)$ 将 D 映到 D 自身，且 $f(0)=0$，则 $f(z)=e^{i\theta}z$.

有了这两条 Cartan 定理，就可以定出 C^2 中的单位球及双圆柱上的全纯自同构群．

6.3　单位球及双圆柱上的全纯自同构群

若 U 为 C^2 中的域，如果存在将 U 映为自身的双全纯映射 $f(z)$，则称此映射为 U 上的全纯自同构(holomorphic automorphism)或双全纯自同构(biholomorphic automorphism)．U 上所有的全纯自同构的全体组成一个群，这个群称为 U 上全纯自同构群(group of holomorphic automorphism)，记作 Aut(U)．

定理8　Aut($D^2(0,1)$)是由双全纯映射

$$w = \left(e^{i\theta_1} \frac{z_1 - a_1}{1 - \overline{a}_1 z_1}, e^{i\theta_2} \frac{z_2 - a_2}{1 - \overline{a}_2 z_2} \right) \tag{3.1}$$

及

$$w=\left(e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_1}{1-\overline{a}_1z_2},\ e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_2}{1-\overline{a}_2z_1}\right)\tag{3.2}$$

的全体所组成的，这里，$z=(z_1,z_2)\in D^2(0,1)$，$a_1,a_2\in D(0,1)$，$\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$.

证明 若 $\varphi(z)\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$，且 $\varphi(0)=\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，定义 $\psi(z)=\left(\frac{z_1-\alpha_1}{1-\overline{\alpha}_1z_1},\frac{z_2-\alpha_2}{1-\overline{\alpha}_2z_2}\right)$，则 $g\equiv\psi\circ\varphi\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$，且 $g(0)=0$. 由定理 7(Cartan 定理)，知

$$\begin{aligned}g(z)&=zA=(z_1,\ z_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\\&=(a_{11}z_1+a_{21}z_2,\ a_{12}z_1+a_{22}z_2).\end{aligned}$$

由于 $g\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$，故

$$|a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1,\quad |a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1$$

对任意$(z_1,z_2)\in D^2(0,1)$ 都成立，这立即导出 $|a_{ij}|<1\ (i,j=1,2)$. 取

$$z^{1,k}=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\overline{a}_{11}}{|a_{11}|},\ \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\overline{a}_{21}}{|a_{21}|}\right)\in D^2(0,1),$$

$$z^{2,k}=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\overline{a}_{12}}{|a_{12}|},\ \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\overline{a}_{22}}{|a_{22}|}\right)\in D^2(0,1),$$

则

$$g(z^{1,k})=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{11}|+|a_{21}|),\ *\right)\in D^2(0,1),$$

$$g(z^{2,k})=\left(*,\ \left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{12}|+|a_{22}|)\right)\in D^2(0,1),$$

于是

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{11}|+|a_{21}|)<1,$$

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{12}|+|a_{22}|)<1.$$

让 $k\to\infty$，即得

$$|a_{11}|+|a_{21}|\leqslant 1,\quad |a_{12}|+|a_{22}|\leqslant 1.\tag{3.3}$$

另一方面

$$\left(1-\frac{1}{k},\ 0\right)\in D^2(0,1),$$

$$\left(0,\ 1-\frac{1}{k}\right)\in D^2(0,1),$$

$$g\left(1-\frac{1}{k},\ 0\right)=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)a_{11},\ \left(1-\frac{1}{k}\right)a_{12}\right)\in D^2(0,1),$$

$$g\left(0,\ 1-\frac{1}{k}\right)=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)a_{21},\ \left(1-\frac{1}{k}\right)a_{22}\right)\in D^2(0,1),$$

当 $k\to\infty$ 时，$\left(1-\frac{1}{k},\ 0\right)$与$\left(0,\ 1-\frac{1}{k}\right)$趋于$\partial D^2(0,1)$，故

$$(a_{11},\ a_{12})\in\partial D^2(0,1),\quad (a_{21},\ a_{22})\in\partial D^2(0,1),$$

于是

$$\max\{|a_{11}|,|a_{12}|\}=1,\quad \max\{|a_{21}|,|a_{22}|\}=1. \tag{3.4}$$

要(3.3) 式与(3.4) 式同时成立，只有下列两种情形：

(1) $|a_{11}|=1, a_{12}=0, a_{21}=0, |a_{22}|=1$;

(2) $|a_{12}|=1, a_{11}=0, a_{22}=0, |a_{21}|=1$.

也就是 A 只有下列两种情形：

(1) $A=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & 0\\ 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ e^{i\theta_2} & 0\end{pmatrix}$.

于是得到

(1) $\psi\circ\varphi(z)=z\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & 0\\ 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}=(z_1e^{i\theta_1},z_2e^{i\theta_2})$;

或者

(2) $\psi\circ\varphi(z)=z\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ e^{i\theta_2} & 0\end{pmatrix}=(z_2e^{i\theta_2},z_1e^{i\theta_1})$.

若 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$，则(1) 即是

$$\left(\frac{\varphi_1-\alpha_1}{1-\overline{\alpha}_1\varphi_1},\ \frac{\varphi_2-\alpha_2}{1-\overline{\alpha}_2\varphi_2}\right)=(z_1e^{i\theta_1},\ z_2e^{i\theta_2}),$$

即

$$\frac{\varphi_1-\alpha_1}{1-\overline{\alpha}_1\varphi_1}=z_1e^{i\theta_1},\quad \frac{\varphi_2-\alpha_2}{1-\overline{\alpha}_2\varphi_2}=z_2e^{i\theta_2}.$$

从中解出

$$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)=\left(e^{i\theta_1}\frac{\alpha_1e^{-i\theta_1}+z_1}{1+\overline{\alpha}_1e^{i\theta_1}z_1},\ e^{i\theta_2}\frac{\alpha_2e^{-i\theta_2}+z_2}{1+\overline{\alpha}_2e^{i\theta_2}z_2}\right),$$

而此即为(3.1) 式的形式. 同样，在(2) 的情形，φ 为(3.2) 式的形式. 证毕.

下面要定出单位球上的全纯自同构群，可以直接验证

$$\varphi_a(z_1,z_2)=\left(\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1},\ \frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}z_2}{1-\overline{a}z_1}\right)\in \mathrm{Aut}(B(0,1)), \tag{3.5}$$

这里 $a\in \boldsymbol{C}$，$|a|<1$. 由于

$$\left|\frac{z_1-a}{1-\overline{a}z_1}\right|^2+\left|\frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}z_2}{1-\overline{a}z_1}\right|^2$$
$$=\frac{|z_1|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z_1+|a|^2+(1-|a|^2)|z_2|^2}{|1-\overline{a}z_1|^2},$$

上式右边小于等于

$$\frac{1-|a|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z_1+|a|^2+|a|^2|z_1|^2}{|1-\overline{a}z_1|^2}=1$$

当且仅当$(z_1,z_2)\in B(0,1)$. 故(3.5)式成立. 显然$(\varphi_a)^{-1}=\varphi_{-a}$，两行两列的方阵 U 称为酉方阵(unitary matrix). 若 $U\overline{U'}=I$，这里，$\overline{U'}$ 为 U 的共轭转置. 映射 $w=zU$ 称为酉旋转，记作 $w=U(z)$.

定理 9 若 $g(z)\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$，且 $g(0)=0$，则 g 为酉旋转，即 $g(z)=zA$，而 A 为酉方阵.

证明 由于 $B(0,1)$ 为圆型域，故由定理 7(Cartan 定理) 知 $g(z)=zA$，而 g 将单位向量映到单位向量. 若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

(α,β) 为单位向量，则

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=(\gamma,\delta)$$

也是单位向量，而

$$\gamma=a_{11}\alpha+a_{21}\beta,\quad \delta=a_{12}\alpha+a_{22}\beta.$$

于是

$$|a_{11}\alpha+a_{21}\beta|^2+|a_{12}\alpha+a_{22}\beta|^2=1. \tag{3.6}$$

取 $\alpha=1,\beta=0$ 及 $\alpha=0,\beta=1$，得到

$$|a_{11}|^2+|a_{12}|^2=1,\quad |a_{21}|^2+|a_{22}|^2=1. \tag{3.7}$$

将(3.7)式代入(3.6)式，得到

$$\mathrm{Re}((a_{11}\overline{a}_{21}+a_{12}\overline{a}_{22})\alpha\overline{\beta})=0.$$

取 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\alpha=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则得

$$\mathrm{Re}(a_{11}\overline{a}_{21}+a_{12}\overline{a}_{22})=0,$$
$$\mathrm{Im}(a_{11}\overline{a}_{21}+a_{12}\overline{a}_{22})=0,$$

所以

$$a_{11}\overline{a}_{21}+a_{12}\overline{a}_{22}=0. \tag{3.8}$$

由(3.7)式和(3.8)式即得 A 为酉方阵.

定理 10　$\mathrm{Aut}(B(0,1))$ 中每个元素均可表为最多两个酉旋转及一个 φ_a 的复合,即 $\mathrm{Aut}(B(0,1))$ 是由酉旋转与 φ_a 及其复合所组成的.

证明　若 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$,$f(0)=\alpha$,则有酉方阵 U,使得 $\alpha U=(|\alpha|,0)$. 作 $g(z)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ f(z)$,这里,$\varphi_{|\alpha|}$ 由(3.5)式所定义,将 $(|\alpha|,0)$ 映为 0 点. 于是,$g(z)\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$,且

$$g(0)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ f(0)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ\alpha=0.$$

由定理 9,有

$$g(z)=zV=V(z),$$

这里,V 为酉方阵,于是

$$f(z)=U^{-1}\circ\varphi_{-|\alpha|}\circ V(z).$$

这就证明了定理 10.

6.4　Poincaré 定理

现在可以来证明重要的 Poincaré 定理.

定理 11(Poincaré 定理)　不存在双全纯映射 Φ 将 $D^2(0,1)$ 映到 $B(0,1)$ 上.

证明　用反证法. 如果存在这样的双全纯映射 φ 将 $D^2(0,1)$ 映为 $B(0,1)$,且 $\varphi(0)=\alpha$,则 $\Phi=\varphi_\alpha\circ\varphi$ 也是一个双全纯映射,将 $D^2(0,1)$ 映为 $B(0,1)$,且 $\Phi(0)=\varphi_\alpha\circ\varphi(0)=0$,这里,$\varphi_\alpha$ 由(3.5)式所定义. 若 $h\in\mathrm{Aut}(D^2(0,1))$,则

$$h\to\Phi\circ h\circ\Phi^{-1}\in\mathrm{Aut}(B(0,1)) \tag{4.1}$$

建立起这两个群之间的同构. 若 $(\mathrm{Aut}(D^2(0,1)))_0$ 与 $(\mathrm{Aut}(B(0,1)))_0$ 分别表示 $\mathrm{Aut}(D^2(0,1))$ 与 $\mathrm{Aut}(B(0,1))$ 的包含有单位元的分支,于是(4.1)式建立起了 $(\mathrm{Aut}(D^2(0,1)))_0$ 与 $(\mathrm{Aut}(B(0,1)))_0$ 之间的同构,特别取在其中使原点不变的子群,分别记作 $\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$ 与 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$,则(4.1)式建立起了这两个子群之间的群同构.

由定理 8,$\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$ 是由所有的双全纯映射 $w=(e^{i\theta_1}z_1,e^{i\theta_2}z_2)=(z_1,z_2)\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&0\\0&e^{i\theta_2}\end{pmatrix}$ (θ_1,θ_2 为实数) 组成的, 也就是这个群由所有的

$\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right\}$组成.

由定理 10,$\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$由所有的双全纯映射

$$w = zVU^{-1}$$

组成,这里,U,V 为酉方阵.由于酉方阵的逆及乘积仍为酉方阵,故 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$ 由所有的 $w = zX$ 组成,这里,X 为酉方阵.也就是这个群由所有的酉方阵所组成,即为酉群.

如果存在双全纯映射将 $D^2(0,1)$ 映到 $B(0,1)$,则由(4.1)式建立起 $\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$ 到 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$ 的群同构,即群$\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right\}$与酉群相同构.但这是不可能的,因为群$\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right\}$为 Abel 群,即可交换群,而酉群不是 Abel 群,于是得矛盾.故这样的双全纯映射 Φ 是不存在的,这就证明了 Poincaré 定理.

第 4 章中的 Riemann 映射定理说:对任一边界点至少有两点的单连通区域 Ω,一定存在一个全纯单叶函数将 Ω 映为单位圆,即两个区域如拓扑等价,一定导出全纯等价.Poincaré 定理说:$\boldsymbol{C}^n(n \geqslant 2)$ 时,这是不对的,即两个区域是拓扑等价的未必导出全纯等价.于是就引出了 $\boldsymbol{C}^n$ 中区域的分类问题,即如果两个区域拓扑等价,什么时候全纯等价?这个问题距离解决还很远.已经知道:任给两个拓扑等价的区域是全纯等价的概率为零,即几乎所有拓扑等价的域相互都不全纯等价.

这里反过来看出第 4 章中的 Riemann 映射定理是一个非常深刻的定理,这个定理只在一维时才成立,由此出发可以得到只有在一维情形下成立的一系列深刻的定理.

6.5 Hartogs 定理

在单复变数的情形,若 Ω 为$\boldsymbol{C}$中的域,$a \in \boldsymbol{C}\backslash\Omega$,那么一定存在一个在 Ω 上的全纯函数 f,使得这个函数不可能解析开拓到 a 点.这是容易做到的,例如取 $f(z) = \frac{1}{z-a}$ 即可.但是到了多复变数情形,这件事就不成立,这种现象称为 Hartogs 现象(Hartogs phenomenon).一般的 Hartogs 定理可叙述如下.

定理 12(Hartogs 定理) 若 $\Omega \subseteq C^n (n \geqslant 2)$ 为域，K 为 Ω 中的紧致子集，且 $\Omega \setminus K$ 为连通的. 若 f 为 $\Omega \setminus K$ 上的全纯函数，则存在一个在 Ω 上的全纯函数 F，使得 F 在 $\Omega \setminus K$ 上等于 f.

也就是说，如果函数在 $\Omega \setminus K$ 上全纯，一定可以全纯开拓到 Ω 上去.

这里不给出这个定理的证明，只是在一些特殊情形下来证明 Hartogs 定理.

若 R 为 C^2 中的一个域，R 称为一个 Reinhardt 域，若 $z = (z_1, z_2) \in R$ 导出 $(e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2) \in R$ 对任意实数 θ_1, θ_2 都成立.

定理 13 若 R 为 C^2 中的一个 Reinhardt 域，$f(z)$ 为 R 上的全纯函数，则 f 在 R 上可以展开成 Laurent 级数

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk} z_1{}^j z_2{}^k, \tag{5.1}$$

这个级数在 R 中任一紧致子集上一致收敛到 f，且这样的级数展开式是唯一的.

证明 先证唯一性. 取 $w = (w_1, w_2) \in R$，且 $w_1 \neq 0, w_2 \neq 0$. 因级数(5.1)在 R 中任一紧致子集上一致收敛，令 $z_1 = w_1 e^{i\theta_1}, z_2 = w_2 e^{i\theta_2}$，则 $(z_1, z_2) \in R$，当 $-\pi \leqslant \theta_1 \leqslant \pi, -\pi \leqslant \theta_2 \leqslant \pi$ 时，所有 (z_1, z_2) 是 R 中的一个紧致子集. 于是

$$a_{jk} = \frac{w_1{}^{-j} w_2{}^{-k}}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(w_1 e^{i\theta_1}, w_2 e^{i\theta_2}) e^{-i(j\theta_1 + k\theta_2)} d\theta_1 d\theta_2,$$

即所有的 a_{jk} 由 f 所唯一确定.

再证级数(5.1)的存在性.

首先可以看出：若 $f(z)$ 在

$$\Omega = \left\{ z \in C^2 \;\middle|\; r_1 < |z_1| < R_1, r_2 < |z_2| < R_2 \right\}$$

上全纯，则可以两次应用单复变数函数的 Laurent 展开，得到 $f(z)$ 在 Ω 上的 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} b_{jk} z_1{}^j z_2{}^k,$$

且在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛.

若 $w = (w_1, w_2) \in R$，则可取 ε 充分地小，使得

$$\Omega(w,\varepsilon) = \left\{ z \in C^2 \;\middle|\; |w_1| - \varepsilon < |z_1| < |w_1| + \varepsilon, |w_2| - \varepsilon < |z_2| < |w_2| + \varepsilon \right\} \subseteq R,$$

这是能做到的. 于是，$f(z)$ 在 $\Omega(w, \varepsilon)$ 上有 Laurent 展开式

$$f(z) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk}(w) z_1{}^j z_2{}^k \quad (z \in \Omega(w, \varepsilon)),$$

且在 w 的一个邻域中一致收敛于 f.

若 $w' \in \Omega(w,\varepsilon)$,而 $f(z)$ 在 w' 点有 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk}(w') z_1^j z_2^k,$$

由 Laurent 展开式的唯一性,$a_{jk}(w') = a_{jk}(w)$,也就是 $a_{jk}(w)$ 在 R 中局部为常数.由于 R 为连通的,故 $a_{jk}(w) = a_{jk}$ 是一个不依赖于 w 的常数.于是,$f(z)$ 在 R 中有 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk} z_1^j z_2^k,$$

且在任一点 $z \in R$ 的邻域中一致收敛,故在 R 中任一紧致子集上一致收敛.定理证毕.

由定理 13 即可导出

定理 14 若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的一个 Reinhardt 域,在 R 中存在这样的点,既含有第一个坐标为 0 的点,也含有第二个坐标为 0 的点,即有点 $z = (z_1, z_2)$,或者 $z_1 = 0$,或者 $z_2 = 0$,那么在 R 上全纯的函数 $f(z)$ 一定可以在 R 中有展开式

$$f(z) = \sum_{j,k\geqslant 0} a_{jk} z_1^j z_2^k, \tag{5.2}$$

且在 R 的任意紧致子集上级数一致收敛.

证明 由定理 13,$f(z)$ 可以有展开式(5.1),由于 R 中有 $(0, z_2)$ 这样的点,所以在展开式(5.1)中所有 $j<0$ 的 a_{jk} 全为零,否则展开式(5.1)不可能在 $(0, z_2)$ 的邻域中一致收敛.同样,由于在 R 中存在 $(z_1, 0)$ 这样的点,所以在展开式(5.1)中所有 $k<0$ 的 a_{jk} 全为零.于是定理获得证明.

定理 15(Reinhardt 域上的 Hartogs 定理) 若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的 Reinhardt 域,且在 R 中存在这样的点,其第一个坐标为 0 或者第二个坐标为 0,即 $z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$,于是任意在 R 上全纯的函数 $f(z)$ 一定可以全纯开拓到 $R' = \{(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2) \in \boldsymbol{C}^2 \mid 0 \leqslant \rho_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \rho_2 \leqslant 1, (z_1, z_2) \in R\}$,即在 R' 上存在一个全纯函数 $\boldsymbol{F}$,使得当 $z \in R$ 时 $\boldsymbol{F} = f$.

定理的证明是显然的.由于 $f(z)$ 在 R 中可以展开成级数(5.2),对任意 $z \in R$,级数(5.2)在 z 的邻域中是一致收敛的,若 $(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2) \in R'$,于是

$$\sum_{j,k\geqslant 0} a_{jk} \rho_1^j \rho_2^k z_1^j z_2^k$$

是收敛的,因此级数(5.2)在 $(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2)$ 的邻域中是一致收敛的.记其收敛的函数为 $\boldsymbol{F}$,这就是我们所要的 $\boldsymbol{F}$.

下面立即可以举出具体的例子来说明 Hartogs 现象.

例　令 $B_r(0,1)=\left\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \,\middle|\, r<|z_1|^2+|z_2|^2<1\right\}$，则 $B_r(0,1)$ 为一个 Reinhardt 域，这里，$0<r<1$. 所以，如果 $f(z)$ 在 $B_r(0,1)$ 上全纯，那么一定可以全纯开拓到 $B(0,1)=\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \,|\, |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$，即开拓到单位球上.

以上讨论了 Reinhardt 域上的 Hartogs 定理. 由于在多复变数中有 Hartogs 定理，那么怎样的域才是我们该讨论的?粗略地讲，应该讨论那些没有 Hartogs 现象的域，这类域称为全纯域(domain of holomorphy). 对全纯域的研究是 20 世纪多复变数函数论研究的最主要的主题之一，有兴趣的读者可参阅有关多复变数函数论的书，例如 S. G. Krantz[2] 和 R. Narasimhan[2].

这一章的讨论是在 $\boldsymbol{C}^2$ 中进行的，不难看出，这些结果都可以无困难地推广到 $\boldsymbol{C}^n$ 中去.

参 考 文 献

华罗庚

[1] 高等数学引论:第二卷[M].北京:科学出版社,1982.

伍鸿熙,吕以辇,陈志华

[1] 紧黎曼曲面引论[M].北京:科学出版社,1981.

庄圻泰和张南岳

[1] 复变函数[M].北京:北京大学出版社,1984.

余家荣

[1] 复变函数[M].北京:高等教育出版社,1980.

范莉莉和何成奇

[1] 复变函数论[M].上海:上海科学技术出版社,1987.

龚 昇

[1] 简明微积分[M].4 版.北京:高等教育出版社,2006.

Ahlfors L V

[1] Complex Analysis[M]. 3rd ed. McGraw-Hill, 1979.

[2] An Extension of Schwarz's Lemma[J]. Tran. Amer. Math. Soc., 1938, 43: 359 ～364.

[3] Conformal in Variants[M]. McGraw-Hill, 1973.

Ahlfors L V and Sario L

[1] Riemann Surfaces[M]. Princeton University Press, 1960.

Bell S R

[1] The Cauchy Transform Potential Theory and Conformal Mappings[M]. CRC Press, 1992.

Berenstein C A and Gay R

[1] Complex Variables: An Introduction[M]. Springer-Verlag, 1991.

Cartan H

[1] Théorie Elémentaire des Fonctions Analytique d'une ou Plusieurs Variables Complexes[M]. Paris, 1961.

Carathéodory C

[1] Conformal Repersentation[M]. Cambridge University Press, 1958.

[2] Theory of Functions of a Complex Variable: Ⅰ, Ⅱ [M]. Chelsea, 1954.

Conway J B

[1] Function of One Complex Variable[M]. Springer-Verlag, 1986.

Fuchs W H J

[1] The Theory of Function of One Complex Variable[M]. Van Nostrand, 1967.

Grauert H and Reckziegel H

[1] Hermiteschen Metriken und Normale Familien Holomorpher Abbildungen [J]. Math. Z., 1956, 89: 108~125.

Greene R E and Krantz S G

[1] Biholomorphic Self-Maps of Domains. Lecture Notes. 1276[M]. Springer-Verlag: 136~207.

Heins M

[1] Complex Function Theory[M]. Academic Press, 1968.

Hill E

[1] Analytic Function Theory[M]. Chelsea, 1959.

Hurwitz A and Courant R

[1] Funktionen Theorie[M]. 4th ed. Springer-Verlag, 1964.

Jordan C

[1] Cours d'Analyse[M]. Gauthier-Villars, 1893.

Kobayashi Z

[1] Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings[M]. Marcel Dekker, 1970.

Krantz S G

[1] Complex Analysis: The Geometric Viewpoint[M]. MAA, 1990.

[2] Theory of Several Complex Variables[M]. 2nd ed. John Wiley and Sons, 1991.

[3] Partial Differential Equations and Conformal Analysis[M]. CRC Press, 1992.

Lang S

[1] Complex Analysis[M]. 2nd ed. Springer-Verlag, 1985.

Markushevich A I

[1] Theory of Functions of a Complex Variable[M]. Chelsea, 1977.

Minda D and Schober G

[1] Another Elementary Approach to the Theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky[J]. Complex Variables, 1983, 2: 157~164.

Narasimhan R

[1] Complex Analysis in One Variable[M]. Birkhäuser, 1984.

[2] Several Complex Variables[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1971.

Nevanlinna R

[1] Analytic Functions[M]. Springer-Verlag, 1970.

Palka B P

[1] An Introduction to Complex Function Theory[M]. Springer-Verlag, 1991.

Robinson R M

[1] A Generalization of Picard's and Related Theorems[J]. Duke Math. J., 1939,5: 118～132.

Rudin W

[1] Real and Complex Analysis[M]. McGraw-Hill, 1966.

Saks S and Zygmund A

[1] Analytic Functions[M]. Elsevier, 1971.

Siegel C L

[1] Topics in Complex Function Theory[M]. John Wiley and Sons, 1969.

Springer G

[1] Introduction to Riemann Surface[M]. Addison-Wesley Publishing Co., 1957.

Titchmarch E C

[1] The Theory of Functions[M]. Oxford University Press, 1939.

Zalcman L

[1] A Heuristic Principle in Complex Function Theory[J]. Amer. Math. Soc. Monthly, 1975,82:813～817.

[General Information]
书名=简明复分析
作者=龚昇编著
页数=159
SS号=12301981
DX号=
出版日期=2009.05
出版社=中国科学技术大学出版社